Homologie singulière et applications

Exemples et constructions

Exercice 1. Calculer les groupes d'homologie des espaces suivants X:

1. X est un un cornet de glace avec une boule, puis X est le même cornet où on a (malheureusement) remplacé la glace par une balle de tennis.
2. $X = \Sigma(S^1 \vee S^1 \vee S^2)$ où $\Sigma : \mathbf{Top} \to \mathbf{Top}$ est la suspension.
3. $X = S^n \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$.

Exercice 2 (Bouteille de Klein). Soit K l'espace topologique, appelé *bouteille de Klein*, obtenu comme le quotient du plan $\mathbb{R}^2$ par les transformations affines $\alpha(x, y) = (x + 1, y)$ et $\beta(x, y) = (1 - x, y + 1)$.

1) Calculer les groupes d'homologie $H_*(K, \mathbb{Z})$ et $H_*(K, \mathbb{R})$ en utilisant la suite exacte de Mayer-Vietoris.
2) Calculer les groupes d'homologie de la bouteille de Klein en utilisant un modèle quasi-simplicial et comparer.

Exercice 3 (Espaces projectifs complexes). Rappelons que l'espace projectif complexe de dimension n est le quotient $\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\mathbb{C} - \{0\} \cong S^{2n+1}/S^1$. On note $[z_0, \dots, z_n]$ la classe de $[z_0, \dots, z_n] \neq 0$ dans $\mathbb{C}P^n$ (par définition $[z_0, \dots, z_n] = [\lambda z_0, \dots, \lambda z_n]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$). Les inclusions canoniques $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^i = \mathbb{C}^{n+i}$ induisent des morphismes continus $\mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}P^{n+i}$. on notera $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P^n$ la projection canonique.

1. Montrer que pour tout $k = 1 \dots n$, le sous-ensemble $U_k = \{[z_0, \dots, z_n] \mid z_k \neq 0\}$ est ouvert et homéomorphe à $\mathbb{C}^n$. Montrer que $\mathbb{C}P^n - U_n \cong \mathbb{C}P^{n-1}$.
2. Soit $f : D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$ l'application $(z_0, \dots, z_{n-1}) \mapsto \left[z_0, \dots, z_{n-1}, \sqrt{1 - (|z_0|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2)}\right]$. Montrer que $f(\partial(D^{2n})) \subset \mathbb{C}P^n - U_n$ et que $f_{|D^{2n} - \partial(D^{2n})}$ est injective à valeur dans U_n. On note $f_0 = f_{|\partial(D^{2n})} : \partial(D^{2n}) \to \mathbb{C}P^n - U_n \cong \mathbb{C}P^{n-1}$. Montrer que f_0 est surjective et en déduire que $\mathbb{C}P^n$ est le recollement $D^2 n \cup_{f_0} \mathbb{C}P^{n-1}$.
3. Calculer les groupes d'homologie $H_\bullet(\mathbb{C}P^n)$ (à coefficient dans $\mathbb{Z}$).
4. Quelle est l'homologie de $\mathbb{C}P^\infty = \bigcup \mathbb{C}P^n$ (pour la topologie de la réunion) ? (On pourra utiliser l'exercice 7)

Exercice 4 (une application non triviale en homologie modulo k). Soit $k \geq 2$ un entier et $f : S^n \to S^n$ l'application définie comme la composée $f : S^n \to \bigvee_{i=1}^k S^n \to S^n$ (où la première application est obtenue en pinçant successivement $k-1$-fois une sphère en son équateur et la deuxième est l'identité sur chaque sphère du bouquet $\bigvee_{i=1}^k S^n$). On note $X = S^n \cup_f D^{n+1}$ l'espace obtenu en recollant D^{n+1} sur S^n suivant $f : \partial D^{n+1} \cong S^n \to S^n$. On note $p : X \to X/S^n$ l'application quotient.

1. Montrer que f est de degré k et que X/S^n est homéomorphe à S^{n+1}.

2. Montrer que l'application $p_* : H_m(X, \mathbb{Z}) \to H_m(S^{n+1}, \mathbb{Z})$ induite en homologie (à coefficient dans $\mathbb{Z}$) est nulle pour tout m.

3. Montrer que $p_* : H_m(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \to H_m(S^{n+1}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ induite en homologie (à coefficient dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$) *n'est pas* nulle pour tout m et en déduire que p n'est pas homotope à une application constante.

4. Construire, pour tout suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de groupes abéliens de type fini, un espace topologique X tel que pour tout i on ait $H_i(X) \cong A_i$.

Exercice 5 (**Homéomorphismes du Tore**)**.** Soit $T = S^1 \times S^1$ un tore plongé dans $\mathbb{R}^3$ et $P = S^1 \times D^2$ le tore plein dont T est le bord.

1. Calculer les groupes d'homologie $H_*(T, \mathbb{Z})$ et $H_*(P, \mathbb{Z})$.

2. Soit $f : T \to T$ et $g : P \to P$ deux homéomorphismes. Décrire $H_*(f) : H_*(T, \mathbb{Z}) \to H_*(T, \mathbb{Z})$ et $H_*(g) : H_*(P, \mathbb{Z}) \to H_*(P, \mathbb{Z})$. En déduire une condition nécéssaire (de nature homologique) pour qu'un homéomorphisme $f : T \to T$ s'étende en un homéomorphisme de P.

3. Soit $f : T \to T$ un isomorphisme du Tore (en tant que groupe topologique). En utilisant la question précédente, donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f s'étende en un homéomorphisme de P.

Exercice 6. Soit $X \subset Y \subset Z$ trois espaces topologiques. Montrer qu'il y a une suite exacte longue naturelle en homologie (on pourra considérer une suite exacte courte de complexes de chaines relatives)

$$\cdots \to H_i(Y, X) \to H_i(Z, X) \to H_i(Z, Y) \to H_{i-1}(Y, X) \to \dots$$

Exercice 7 (**Homologie d'une réunion**)**.** Soit X un espace topologique et on suppose que X est la réunion topologique $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ d'une suite croissante $X_0 \subset X_1 \subset \cdots X_n \subset \cdots$ de sous-espaces qui vérifie que tout compact de X est inclus dans un des X_i.

1. Démontrer qu'il y a une surjection $\bigoplus\limits_{i\in\mathbb{N}} H_*(X_i) \to H_*(X)$.

2. Déterminer le noyau de l'application précédente et en déduire que $H_*(X) \cong \operatorname*{colim}\limits_{i\in\mathbb{N}} H_*(X_i)$.

Exercice 8 (**Compléments de boules**)**.** Soit X un sous espace de S^n homéomorphe à une boule D^r. On note $f : D^r \to S^n$ une application injective qui est un homéomorphisme sur son image, telle que $X = f(D^r)$.

1. Démontrer que $H_\bullet(S^n - f(D^r)) \cong H_\bullet(\{*\})$ et en déduire que $S^n - f(D^r)$ est connexe (on pourra raisonner par récurrence, écrire $D^n \cong D^{n-1} \times I$ et considérer les fermés $D^{n-1} \times [0, 1/2]$ et $D^{n-1} \times [1/2, 1]$ puis procéder par dichotomie...).

2. En déduire les groupes d'homologie de $\mathbb{R}^n \setminus X$ où X est encore un sous-espace homéomorphe à une boule D^r.

3. Calculer les groupes d'homologie de $S^n \setminus S^0$.

4. On décompose S^k en deux hémisphères qui se rencontrent en un rétract par déformation de S^{k-1}. En utilisant la suite exacte de Mayer Vietoris, calculer l'homologie $H_*(S^n \setminus S^k)$.

Quelques applications célèbres

Exercice 9 (**Invariance du domaine).** Démontrer le théorème d'invariance du domaine: si deux ouverts non-vides $U \subset \mathbb{R}^n$ et $V \subset \mathbb{R}^m$ sont homéomorphes alors $n = m$. (on pourra considérer les groupes d'homologie relative $H_*(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p \setminus \{x\})$).

Exercice 10 (**Théorèmes de séparation de Jordan généralisés).** Dans ce qui suit on considère les groupes d'homologie d'un espace X à coefficient dans $\mathbb{R}$ (qu'on oublie dans les notations).

1. Soit $f : D^r \to S^n$ une application injective qui est un homéomorphisme sur son image. Démontrer que $S^n - f(D^r)$ a l'homologie d'un point puis que pour une immersion $f : S^r \to S^n$, $H_\bullet(S^n - f(S^r)) \cong H_\bullet(S^{n-r-1})$ si $r < n$. (utiliser l'exercice 8).
2. En déduire que si $r = n-1$, alors $S^n - f(S^{n-1})$ a exactement deux composantes connexes qui sont acycliques et dont les bords sont exactement $f(S^{n-1})$.
3. Déduire de **2.** que si $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ est une immersion avec $n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n - f(S^{n-1})$ a deux composantes connexes. De plus une d'entre elle est bornée et acyclique et l'autre est non-bornée.

Exercice 11 (**Non plongement de $\mathbb{R}P^2$ dans $\mathbb{R}^3$).** Rappelons que $\mathbb{R}P^2$ est le plan projectif, quotient de S^2 par $\{\pm \mathrm{Id}\}$.

1. Démontrer que $\mathbb{R}P^2$ peut se décomposer comme une réunion $M \bigcup D$, où M est une bande de Moebius et D est un disque, tels que $M \cap D$ est homéomorphe à un cercle.
2. On suppose désormais donné un plongement $f : \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, c'est à dire une application injective qui est un homéomorphisme sur son image. On identifiera $\mathbb{R}P^2$, M et D avec leurs images $f(\mathbb{R}P^2)$, $(f(M)$ et $f(D)$ dans $\mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que $H_i(\mathbb{R}^3 \setminus M) = \mathbb{Z}$ si $i = 0$ ou 1 et 0 sinon.
   (b) Montrer que l'application induite en homologie $H_1(\mathbb{R}^3 \setminus M) \to H_1(\mathbb{R}^3 \setminus \partial M)$ est la multiplication par 2.
   (c) En utilisant la suite de Mayer-Vietoris, en déduire un élément de 2-torsion dans l'homologie de $H_0(\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}P^2)$
3. Conclure qu'il n'existe pas de plongements du plan projectif dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 (**Non existence de structures de groupes topologiques et degré).** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[S^n]$ un générateur du $\mathbb{Z}$-module $H_n(S^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

1. Soit $f : S^n \to S^n$ une application continue. Montrer qu'il existe un un unique entier $\deg(f)$ tel que $f_*([S^n]) = \deg(f)[S^n]$. On appelle cet entier le degré de f. Quel est le degré de l'application antipodale $x \mapsto -x$?
2. **(Structures de groupes sur les sphères)** On va montrer qu'il n'y a pas de structures de groupe topologique sur les sphères S^{2n} pour $n > 0$.
   (a) Montrer que $H_k(S^m \times S^m) \cong \bigoplus_{i+j=k} H_i(S^m) \otimes H_j(S^m)$ et que pour toute application $\mu : S^m \times S^m \to S^m$, il existe $\deg_1(\mu), \deg_2(\mu) \in \mathbb{Z}$ tels que $\mu_*([S^n]) = \deg_1(\mu)[S^n] \otimes 1 + \deg_2(\mu)1 \otimes [S^n]$.
   (b) Montrer que si $\mu : S^m \times S^m \to S^m$ admet une unité, alors $\deg_1(\mu) = \deg_2(\mu) = 1$.
   (c) En utilisant que $w_n \cup w_n = 0$, montrer que $\deg_1(\mu)\deg_2(\mu) = 0$ si n est pair (on pourra utiliser que le cup-produit est gradué commutatif).
   (d) Conclure.