Cohomologie singulière et foncteurs dérivés

Cohomologie singulière

Exercice 1. En utilisant la formule de Künneth et les coefficients universels, calculer les groupes d'homologie et de cohomologie des espaces suivants à coefficients dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

1. $S^n \times S^m$ et $(S^1)^{10}$.
2. $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$.
3. K la bouteille de Klein (en réutilisant les résultats que l'on a vu en cours/TD pour son homologie à coefficient dans $\mathbb{Z}$).

Exercice 2 (Produit Cup).

1. Soit $X = S^n \vee S^m \vee S^{n+m}$. Montrer que X a les mêmes groupes d'homologie et cohomologie que $S^n \times S^m$.
2. Calculer les structures d'anneaux de la cohomologie de X et de $S^n \times S^m$ et en déduire que ces espaces ne sont pas homéomorphes ni homotopes (on pourra utiliser que le morphisme de Künneth est un morphisme d'anneaux gradués).
3. Montrer qu'il y'a une application continue du tore à g-trous vers $\bigvee_{i=1}^{g} T$ (où $T = S^1 \times S^1$ est le tore usuel). En déduire la structure d'anneau de la cohomologie du tore à g-trous.

Exercice 3 (Non existence de structures de groupes topologiques et degré). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[S^n]$ un générateur du $\mathbb{Z}$-module $H_n(S^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

1. Soit $f : S^n \to S^n$ une application continue. Montrer qu'il existe un un unique entier $\deg(f)$ tel que $f_*([S^n]) = \deg(f)[S^n]$. On appelle cet entier le degré de f. Quel est le degré de l'application antipodale $x \mapsto -x$?
2. Montrer que l'application $\mathrm{Hom}(H_*(S^n), \mathbb{Z}) \to H^*(S^n)$ est un isomorphisme. On notera w_n l'image de $[S^n]$.
3. **(Structures de groupes sur les sphères)** On va montrer qu'il n'y a pas de structures de groupe topologique sur les sphères S^{2n} pour $n > 0$.
   (a) Montrer que $H_k(S^m \times S^m) \cong \bigoplus_{i+j=k} H_i(S^m) \otimes H_j(S^m)$ et de même en cohomologie et que pour toute application $\mu : S^m \times S^m \to S^m$, il existe $\deg_1(\mu), \deg_2(\mu) \in \mathbb{Z}$ tels que $\mu_*([S^n]) = \deg_1(\mu)[S^n] \otimes 1 + \deg_2(\mu) 1 \otimes [S^n]$.
   (b) Montrer que si $\mu : S^m \times S^m \to S^m$ admet une unité, alors $\deg_1(\mu) = \deg_2(\mu) = 1$.
   (c) En utilisant que $w_n \cup w_n = 0$, montrer que $\deg_1(\mu) \deg_2(\mu) = 0$ si n est pair (on pourra utiliser que le cup-produit est gradué commutatif).
   (d) Conclure.

Exercice 4 (Cohomologie des espaces projectifs). *Cet exercice est plus dur; mais le résultat suivant est très important en géométrie et topologie algébrique.* Le but de cet exercice est de montrer que l'anneau de cohomologie $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est isomorphe à l'anneau de polynomes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ (où x est de degré 1) et que l'anneau de cohomologie de $\mathbb{C}P^n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ où x est de degré 2.

1. Montrer que, pour tout $k \leq n-1$, on a un isomorphisme naturel $H^k(\mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et en déduire qu'il suffit de montrer que le cup produit du générateur de $H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ avec le générateur de $H^{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un générateur de $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ pour obtenir le résultat souhaité.

2. On identifie $\mathbb{R}P^k \subset \mathbb{R}P^n$ avec le sous-espace d'équation $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ (où $[x_0, \ldots, x_n]$ sont les coordonnées homogènes d'un vecteur) et $\mathbb{R}P^{n-k}$ avec le sous-espace d'équation $x_0 = \cdots = x_{k-1} = 0$. Montrer que l'on a un diagramme commutatif naturel (dans lequel les groupes de cohomologie sont à coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

$$\begin{tikzcd}
H^k(\mathbb{R}P^n) \times H^{n-k}(\mathbb{R}P^n) \arrow[r, "\cup"] & H^n(\mathbb{R}P^n) \\
H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^{n-k}) \times H^{n-k}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^k) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, "\cup"] & H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - Q) \arrow[u] \arrow[d] \\
H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-k}) \times H^{n-k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k) \arrow[r, "\cup"] & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})
\end{tikzcd}$$

   où $Q = \mathbb{R}P^k \cap \mathbb{R}P^{n-k}$ et les flèches de droite sont des isomorphismes.

3. Montrer que les flèches verticales de gauche sont aussi des isomorphismes.

4. Vérifier que la flèche du bas est un isomorphisme et en déduire la structure d'anneau de la cohomologie de $\mathbb{R}P^n$.

5. En reprenant l'exercice de la feuille 6 sur $\mathbb{C}P^n$ et en utilisant les coefficient universels (ou Mayer-Vietoris pour la cohomologie), vérifier que $H^k(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$ si $k = 2i$ avec $0 \leq i \leq n$ et 0 sinon. On notera x un générateur de $H^2(\mathbb{C}P^n)$.

6. Montrer que, pour tout $k \leq n-1$, on a un isomorphisme naturel $H^k(\mathbb{C}P^{n-1}) \cong H^k(\mathbb{C}P^n,)$ et en déduire par récurrence qu'il suffit de montrer que $x \cup x^{n-1}$ est un générateur de $H^{2n}(\mathbb{C}P^n)$ pour obtenir le résultat souhaité.

7. En appliquant le théorème de dualité de Poincaré et les relations entre produit cup et cap, montrer qu'il existe un entier k tel que $x \cup kx^{n-1}$ soit un générateur de $H^{2n}(\mathbb{C}P^n)$.

8. En déduire que $k = \pm 1$ et le résultat souhaité puis démontrer que $\mathbb{C}P^3$ n'est pas homotope à $S^2 \times S^4$.

Foncteurs Ext, Tor et dérivés

Exercice 5 (**Foncteur Tor**)**.** Soient A un anneau et I et J deux idéaux de A.

1. Montrer que $\mathrm{Tor}_1^A(A, A/J) = 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Tor}_1^A(A/I, A/J) \simeq \frac{I \cap J}{IJ}$.
3. Montrer que $\mathrm{Tor}_\bullet^A(\oplus_{i \in I} M_i, N) \cong \oplus_{i \in I} \mathrm{Tor}_\bullet^A(M_i, N)$
4. Montrer que pour tout groupe abélien G, on a $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, G) \cong \ker(G \stackrel{n\times}{\to} G)$.
5. En déduire qu'un groupe G abélien de type fini est libre si et seulement si $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(G, G) = 0$.

Exercice 6. Soit k un corps et $R = k[x_1, x_2]$. On considère les R-modules $M' = R/(x_1 R + x_2 R)$, $M = R/(x_1^2 R + x_1 x_2 R)$ et $M'' = R/(x_1 R)$. On munit k de la structure de R-module pour laquelle x_1 et x_2 agissent trivialement.

1. Montrer que $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\times x_1} M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ est une suite exacte non scindée.
2. Construire des résolutions libres de M' et M'' et en déduire les modules $\mathrm{Ext}^i_R(M', R)$, $\mathrm{Ext}^i_R(M'', R)$, $\mathrm{Ext}^i_A(M, R)$ pour tout i.
3. Calculer $\mathrm{Ext}^\bullet_R(k, k)$ et $\mathrm{Tor}^R_\bullet(k, k)$.

Exercice 7 (Foncteurs additifs)**.** Soit $\mathcal{C}, \mathcal{D}$, deux sous-catégories de R-**Mod** et S-**Mod** qui sont stables par somme directe. On rappelle du cours que F est appelé additif si il commute à la somme directe (c'est à dire $F(X \oplus Y) = F(X) \oplus F(Y)$).

1. Montrer que si F est additif, alors $F(0) \cong 0$.
2. Montrer que pour tout $f, g \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$, la somme $f+g \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y)$ est égale à la composée
$$X \xrightarrow{\delta} X \times X \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y \xrightarrow{\sim} Y \oplus Y = Y \coprod Y \xrightarrow{\sigma} Y$$
où δ et σ sont les applications naturelles induites par $\mathrm{Id}_X : X \to X$ et $\mathrm{Id} : Y \to Y$.
3. En déduire que F est additif si et seulement si, pour tout X, Y objets de $\mathcal{C}$, l'application $\mathrm{Hom}_\mathcal{C}(X, Y) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_\mathcal{D}(F(X), F(Y))$ est un morphisme de groupes.

Exercice 8. *Cet exercice établit que le groupe* $\mathrm{Ext}^1(M, N)$ *calcule les suites exactes courtes d'extrémités* N, M*. Il se généralise à des suites plus longues et groupes* $\mathrm{Ext}^n(M, N)$ *! C'est évidemment un résultat culturellement e pratiquement important.* Soit A un anneau unitaire et M', M'' deux A-modules.

1. On suppose que $\mathrm{Ext}^1_R(M'', M') = 0$. Montrer que toute suite exacte $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ est scindée (on pourra appliquer le foncteur $\mathrm{Ext}^\bullet_A(M'', -)$ à la suite exacte pour trouver une section).
2. On se propose d'étendre le résultat précédent et de montrer qu'il y a un isomorphisme naturel
$$\left\{ \begin{array}{c} \text{classes d'isomorphismes de suites exactes} \\ 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0 \end{array} \right\} \cong \mathrm{Ext}^1_R(M'', M').$$
   (a) Soit $0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ une suite exacte. On note $\xi_{f,g}$ cette suite exacte. Montrer qu'il existe un morphisme naturel $\partial_{\xi_{f,g}} : \mathrm{Hom}_R(M', M') \to \mathrm{Ext}^1_R(M'', M')$ tel que $\partial_{\xi_{f,g}} \circ \psi \circ f = 0$ pour tout $\psi \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$.

   (b) Soit $0 \xrightarrow{j} K \xrightarrow{p} P \to M''$ une suite exacte avec P projectif. Montrer que l'on a une suite exacte naturelle $\mathrm{Hom}_R(P, M') \xrightarrow{j^*} \mathrm{Hom}_R(K, M') \xrightarrow{\partial} \mathrm{Ext}^1_R(M'', M') \xrightarrow{p^*} 0$.

   (c) Montrer que pour tout $\beta : K \to M'$, il existe un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r, "p"] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & \mathrm{coker}(K \xrightarrow{(j,-\beta)} P \oplus M') \arrow[r] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
dont les lignes sont exactes.

   (d) En déduire que pour tout $x \in \mathrm{Ext}^1_R(M'', M')$, il existe une suite exacte $\xi_{f,g} : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ telle que $\partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'}) = x$.

(e) Montrer que si deux suites exactes $\xi_{f,g} : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ et $\xi_{h,k} : 0 \to M' \xrightarrow{h} N \xrightarrow{k} M'' \to 0$ sont isomorphes, alors $\partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'}) = \partial_{\xi_{h,k}}(\mathrm{Id}_{M'})$. En déduire que $\xi_{f,g} \mapsto \partial_{\xi_{f,g}}(\mathrm{Id}_{M'})$ induit une surjection Θ de l'ensemble des classes d'isomorphismes de suites exactes $\xi_{f,g} : 0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ vers $\mathrm{Ext}^1_R(M'', M')$.

(f) Montrer que Θ est un isomorphisme (on pourra reprendre la construction de 3) et 4) pour trouver un inverse.) A quel élément de $\mathrm{Ext}^1_R(M'', M')$ correspond la suite exacte scindée $0 \to M' \to M' \oplus M'' \to M'' \to 0$?

Exercice 9 (Exactitude et $\lim^1$). *Cet exercice montre que le foncteur limite n'est pas exact dans les groupes abéliens. Il est plus dur que les autres, mais les résultats sont utiles.* Soit R un anneau commutatif unitaire. Si I est un ensemble, on appelle suite exacte de R-$\mathbf{Mod}^I$ une collection $(\dots A_i \to B_i \to \dots)_{i \in I}$ de suites exactes de R-$\mathbf{Mod}$.

1. Montrer que $\oplus$ est exact[1] ainsi que le foncteur produit $\prod_{i \in I}$ (où I est un ensemble).

2. Soit I un ensemble totalement ordonné vu comme une catégorie. Démontrer que $\underset{I}{\mathrm{colim}} : R\text{-}\mathbf{Mod}^I \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ (resp. $\underset{I}{\lim}$) est exact à droite (resp. à gauche).

3. On considère maintenant $I = \mathbb{N}^{op} = \cdots \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$, c'est à dire les entiers avec la relation d'ordre opposée à l'usuelle. Montrer que colim est exact mais que lim ne l'est pas (indic: considérer $\lim \mathbb{Z}[x]/(x^n)$).

4. On considère $R = \mathbb{Z}$ et soit $\cdots \xrightarrow{f_2} A_2 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_0} A_0$ un foncteur de I dans $\mathbf{Ab}$.
   (a) Démontrer que $H^1(\mathbb{R}\lim(A_i)) \cong \mathrm{coker}(\delta)$ où $\delta : \prod_{\mathbb{N}} A_i \to \prod_{\mathbb{N}} A_i$ est l'application $\delta(a_0, a_1, \dots) = (a_0 - f_0(a_1), a_1 - f_1(a_2), \dots)$.
   (b) En déduire que si les $f_i : A_{i+1} \to A_i$ sont surjectives $H^1(\mathbb{R}\lim(A_i)) = 0$.
   (c) Démontrer que l'on a toujours $H^n(\mathbb{R}\lim(A_i)) = 0$ pour tout $n \geq 2$.
   (d) (**Condition de Mittag-Lefler**) On suppose que pour tout k, il exite $j \geq k$ tel que pour tout $i \geq j$ l'image de A_i dans A_k est la même que l'image de A_j dans A_k.
   Démontrer que $\lim^1(A_i) = 0$.

5. (**Application à la cohomologie des espaces**). Soit X un complexe quasi-simplicial et $X_0 \subset X_1 \subset \cdots$ une suite croissante de sous-complexes telle que $X = \bigcup X_n$. On note $i_{k,\infty} : X_k \to X$ et $i_{k,k+1} : X_k \to X_{k+1}$ les inclusions et on dispose ainsi d'applications $i^*_{k,k+1} : H^i(X_{k+1}) \to H^i(X_k)$ ainsi que de $i^*_{k,\infty} : H^i(X) \to H^i(X_k)$. Démontrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a une suite exacte courte
$$0 \to \underset{\mathbb{N}^{op}}{\lim}^1 H^{i-1}(X_k) \to H^i(X) \to \underset{\mathbb{N}^{op}}{\lim} H^i(X_k) \to 0.$$
(Indication: vérifier que le complexe des cochaines quasi-simpliciales vérifie la condition de Mittag-Leffler en tout degré i).

Remarque: le foncteur dérivé $H^1(\mathbb{R}\lim)$ se note classiquement $\lim^1$ dans la littérature.

[1] cela fait partie de l'exercice de préciser de quoi dans quoi