Corrigé de la feuille de TD 1 de Revêtements et groupe Fondamental: Logarithme, théorème du relèvement et rappels de topologie

Préliminaire : Soit X un espace topologique et $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, \|z\| = 1\}$ le cercle unité. On identifiera systématiquement une fonction continue $f : S^1 \to X$ avec une fonction continue $g : [0,1] \to X$ telle que $g(0) = g(1)$ ou (même une fonction continue 1-périodique de $\mathbb{R}$ dans X) via l'exponentielle $f \mapsto \big(t \mapsto g(t) = f(\exp(2i\pi t))\big)$ (*cf* l'exercice 3)). La première écriture sera en général utilisé quand on s'intérèsse à S^1 muni de sa structure de sous-groupe de $\mathbb{C}*$.

Si f, g sont deux fonctions continues de $S^1 \to X$[1] telles que $f(1) = g(1)$, on définit leur "concaténation" $f \star g$ comme le chemin $f \star g : S^1 \to X$ défini, pour $z \in S^1$ par

$$f \star g(z) = f(z^2) \text{ pour } \operatorname{Im} z \geq 0 \text{ et } f \star g(z) = g(z^2) \text{ pour } \operatorname{Im} z \leq 0.$$

(de manière équivalente, si on préfère regarder des fonctions définie sur $[0,1]$, on a $f \star g(t) = f(2t)$ pour $t \leq 1/2$ et $f \star g(t) = g(2t-1)$ pour $t \geq 1/2$). Il est facile de vérifier que $f \star g$ est encore continue (puisque $f(1) = g(1)$). En termes moins formels, mais plus intuitifs, $f \star g$ est obtenu en parcourant d'abord le chemin f ("deux fois plus vite") puis en parcourant le chemin g (toujours "deux fois plus vite"). On peut aussi concaténer de manière similaire des chemins continus $h, k : [0,1] \to X$ tels que $h(1) = k(0)$ de manière similaire; on notera encore $h \star k : [0,1] \to X$ la concaténation de h et k.

Notation : on notera $f \simeq g$ pour la relation f est homotope à g.

Exercice 1. (**Logarithme complexe**)

1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et f une fonction holomorphe sur U telle que pour tout z dans U on a $f'(z) = 1/z$ et telle qu'il existe z_0 dans U avec $\exp(f(z_0)) = z_0$.
   (a) Montrer que f est une détermination (holomorphe donc) du logarithme, c'est-à-dire que pour tout z dans U on a $\exp(f(z)) = z$.
   (b) Peut on trouver une telle fonction pour $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?
2. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur lequel il existe une détermination du logarithme. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ telle que
   $$\forall z \in U, \quad f(z)^n = z.$$
   Combien existe-t-il de telles fonctions?
3. On considère les deux séries
   $$f_1(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}, \quad f_2(z) = i\pi + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$$
   Montrer qu'il existe un ouvert connexe contenant les disques ouverts de rayon 1 et de centre 0 et 2 ainsi qu'une fonction g analytique sur U qui coincide respectivement avec f_1 et f_2 sur chacun de ces deux disques.

[1] de telles fonctions sont ausi appelés lacets tracé sur X

Solution 1. 1. (a) Soit $g(z) = \dfrac{\exp(f(z))}{z}$ qui est holomorphe sur U (car $U \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Comme $g'(z) = \dfrac{1}{z}\dfrac{\exp(f(z))}{z} - \dfrac{\exp(f(z))}{z^2} = 0$ on a que g est constante sur U (qui est connexe par arcs). De $g(z_0) = 1$, on déduit $\exp(f(z)) = z$ donc f est une détermination (holomorphe donc) du logarithme. Remarquons que si $h(z)$ est une fonction vérifiant les mêmes hypothèses, alors $\exp(f(z) - h(z) = 1$ implique qu'il existe une constante $k \in \mathbb{Z}$ (indépendante de z par connexité de U) telle que $f - g = 2ik\pi$.

(b) On ne peut pas trouver une telle fonction pour $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; c'est un résultat du cours d'analyse complexe (par exemple). On peut aussi remarquer que d'après la question précédente, deux déterminations du logarithme sur un ouvert connexe différe d'un mulitple de $2i\pi$. Donc si une telle fonction f existait sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, elle coinciderait avec la détermination $z = r\exp(i\theta) \mapsto \log(r) + i\theta$ ($\theta \in] - \pi, \pi[$) sur $\mathbb{C}$ privé de $\mathbb{R}-$ à une constante près. Mais une telle fonction en peut pas être continue en $-1 = \exp(i\pi) = \exp(-i\pi)$, a fortiori elle ne peut pas être holomorphe. On peut aussi intégrer la fonction holomorphe $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{1}{z}$[2] sur le cercle unité pour aboutir à la conclusion que si f existait alors $2i\pi$ serait nul...

2. Soit maintenant g une une détermination du logarithme sur U; alors la fonction $f(z) = \exp(\frac{1}{n}\, g(z))$ est holmorphe sur U et vérifie $f^n(z) = \exp(g(z)) = z$. Si $h^n(z) = z$ avec h une focntion continue sur z, alors $\left(\frac{f(z)}{h(z)}\right)^n = 1$ et on en déduit, par connexité de U, qu'il existe une racine $n$ième de l'unité ξ_k (indépendante de z) telle que $h(z) = f(z)\xi^k$ sur U. Rćiproquement toute fonction de cette forme est une solution du problème. Par conséquent il y a exactement n-fonctions racines $n$ième (qui sont holomorphes sur U).

3. On peut remarquer que $f_1(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} = -\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\dfrac{(-z)^n}{n} = -\ln(1-z)$ en utilisant le développement en série entière (valabe sur le disque unité ouvert) de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$. Donc une fonction qui répond à la question doit être une détermination holomorphe de $-\ln(1-z)$ sur un ouvert connexe U contenant les disques ouverts de rayon 1 et de centre 0 et 2. En particulier, un tel ouvert ne doit pas contenir le point 1. Un calcul similaire montre que $f_2(z)$ est aussi une détermination holomorphe de $-\ln(1-z)$ sur le disque ouvert de rayon 1 et de centre 2 (car sa dérivée est $\frac{1}{1-z}$ et qu'elle est égale à $-i\pi + 2ik\pi$ en $z = 2$). Prenons la détermination holomorphe du logarithme sur $V = \mathbb{C} - i] - \infty, 0]$, donnée par $z = r\exp(i\theta) \mapsto L(z) = \ln(r) + i\theta$ avec $\theta \in]-\pi/2, 3\pi/2[$. Alors Il est immédiat que l'ouvert $U = (1 - \mathrm{id})(V)$ est connexe et contient les disques ouverts de rayon 1 et de centre 0 et 2. Soit $f(z) = -L(1-z)$, qui est holomorphe sur U. Clairement $f(0) = -L(1) = 0$. On a $f(z) = f_1(z)$ sur le disque unité (car ce sont des déterminations de $-\ln(1-z)$ sur le même ouvert connexe et qu'elles coincident en $z = 0$). De même $f(2) = -L(-1) = i\pi = f_2(-1)$ assure que $f(z) = f_1(z)$ sur le disque ouvert de rayon 1 et de centre 2. Par conséquent, f répond à la question.

Exercice 2. (**groupes et topologie**) Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G (muni de la topologie induite).

1. Montrer que si H est ouvert (dans G), alors H est fermé.

2. Montrer que G est séparé si et seulement le singleton $\{1\}$ est fermé dans G.

3. Montrer que si G est connexe, alors il est engendré par tout voisinage non-vide de 1.

4. Montrer que la composante connexe G_0 de 1 est un sous-groupe fermé et distingué[3].

[2] justifier cette dérivée !

[3] on dit aussi normal, surtout en anglais

Solution 2. Rappelons que dnas un groupe topologique G, les translations (à gauche) $\ell_g : h \mapsto g.h$ sont des homéomorphismes (car continue, d'inverse $\ell_{g^{-1}}$ qui est continue). De même pour les transaltions, les conjugaisons...

1. Il suffit de montrer que le complémentaire $G \backslash H$ de H est ouvert. Or $G \backslash H = \bigcup_{g \notin H} g.H$. Comme H est ouvert, chaque $g.H = \ell_g(H)$ est ouvert (puisque les translations sont des homéomorphismes), donc leur réunion aussi.

2. Soit $\mu : G \times G \to G$ l'application $(h, g) \mapsto g^{-1}h$ qui est continue (par définition d'un groupe topologique; on a muni $G \times G$ de la topologie produit bien-sûr). Si $g \neq h \in G$, alors le couple $(h, g) \in \mu^{-1}(G \backslash \{1\})$, qui est ouvert car $\{1\}$ est fermé et μ continue. Comme la topologie produit est engendrée par les ouverts produit, il existe donc des ouverts U_h, U_g contenant respectivement h, g tels que $U_h \times U_g \in \mu^{-1}(G \setminus \{1\})$. Mais alors $U_g \cap U_h = \emptyset$ (par définition de μ...) et on a trouvé des ouverts disjoints séparant g et h.

3. Soit H le groupe engendré par un voisinage V de 1. On a alors $H = \bigcup_{n \geq 1} (V \cup V^{-1})^n$ où $(V \cup V^{-1})^n = \{x_1 \cdots x_n \in G \ / \ x_i \in V \text{ ou } x_i \in V^{-1}\}$. V^{-1} est un ouvert puisque $x \mapsto x^{-1}$ est un homéomorphisme. Comme $(V \cup V^{-1})^2 = \bigcup_{x \in V \cup V^{-1}} x.V \cup V^{-1}$ et qu'une réunion d'ouverts est un ouvert. On en déduit que $(V \cup V^{-1})^2$ est un ouvert. On montre de même que chaque $(V \cup V^{-1})^n$ est ouvert, d'où il suit que H est un sous-groupe ouvert. Donc fermé d'après le **(2)**. Comme G est connexe, $H = G$ ce qui conclut la preuve.

4. Comme toute composante connexe, G_0 est fermé. Il est clair que G_0^{-1} et G_0^n (avec les notations précédentes) sont connexes. On en conclut que le sous-groupe engendré par G_0 est connexe et contient 1, donc il est inclsu dans G_0 donc lui est égal. Que G_0 est distingué découle du fait que gG_0g^{-1} ets un connexe contenant 1 (pour tout $g \in G$) donc inclus dans G_0.

   Remarque: si G est localement connexe, alors, 1 est ouvert dans G_0 donc G_0 est ouvert. Il suit que le groupe quotient G/G_0 est discret (la préimage de tout singleton $[g]$ est gG_0 qui est ouvert dans G).

Exercice 3. (**Relèvement des angles**) Soit $P(S^1) := \{f : [0,1] \to S^1,\ f \text{ continue}\}$ l'ensemble des applications continues de l'intervalle dans le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}$ et $P(\mathbb{R}) := \{f : [0,1] \to S^1,\ f \text{ continue}\}$ l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle dans $\mathbb{R}$. On munit $P(\mathbb{R})$ et $P(S^1)$ de la topologie de la convergence uniforme.

1. Montrer que les structures de groupe naturelle de $(S^1; \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +)$ font de $P(S^1)$ et $P(\mathbb{R})$ des groupes topologiques (où la multiplication est ponctuelle).

2. Montrer que l'exponentielle $t \mapsto \exp(it)$ induit un morphisme de groupes topologiques $P(\mathbb{R}) \xrightarrow{e} P(S^1)$ dont l'image est ouverte.

3. Montrer que $P(S^1)$ est connexe et en déduire le théorème de relèvement des angles.

Solution 3. Si X est un espace topologique, et G un groupe topologique, alors l'esapce $Map(X, G)$ des applications continues hérite d'une structure de groupe donnée par $(f * g)(t) = f(t) \cdot g(t)$. Il est clair que les axiomes d'un groupe sont vérifiés (puisqu'il suffit de le faire pour tout t).

1. D'après la remarque ci-dessus, $P(\mathbb{R})$ et $P(S^1)$ ont des structures naturelles de groupe. Ils sont de plus muni d'une structure d'espace métrique en considérant la norme uniforme. Il est immédiat de vérifier que cela en fait des groupes topologiques (par exemple en utilisant le critère séquentiel[4] pour la continuité).

[4] c'est à dire que f ets continue en x si pour toute suite $(x_n)_n$ qui converge vers x, $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$.

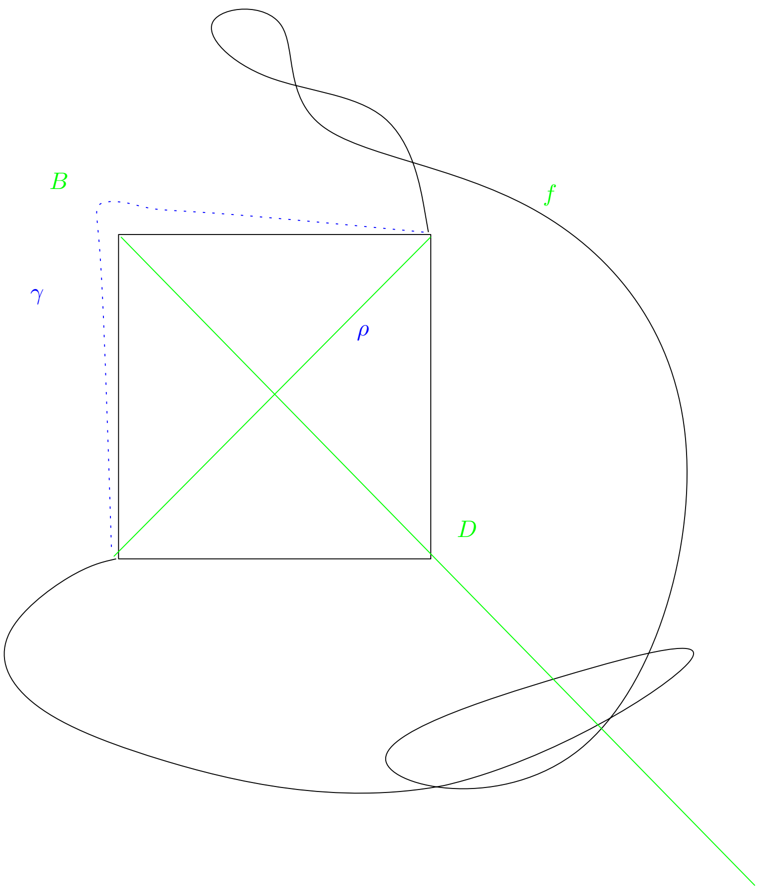

Figure 1: Le carré C et la fermeture de f

2. Comme les structures multiplicatives sont "pocntuelles", il découle immédiatement du fait que l'exponentielle est un morphisme de groupe que $e : f \mapsto \big(t \mapsto \exp(if(t))\big)$ est un morphisme de groupes. Cette application est de plus continue car $t \mapsto \exp(it)$ est uniformément continue. Pour montrer que l'image est ouverte, on suit la démonstration du Lemme 6 du cours.

3. Soit $1 : [0,1] \to S^1$ l'application constante $t \mapsto 1 \in \mathbb{C}$ et soit $f \in P(S^1)$. Alors, l'application $H : [0,1] \to P(S^1)$ définie par $H(s,t) = f(ts)$ est une application continue[5] qui rejoint 1 à la fonction constante $t \mapsto f(0)$. Comme $f(0)$ est relié à 1 par connexité de S^1, on en déduit que $P(S^1)$ est connexe. Par l'Exercice 2, $e(P(\mathbb{R}))$ ouvert dans $P(S^1)$ implique que $e(P(\mathbb{R}))$ est aussi fermé. Il est de plus non-vide, et donc par connexité de $P(S^1)$, $e(P(\mathbb{R})) = P(S^1)$ ce qu'on voulait.

Exercice 4. (**Problème de croisement**) Peut on joindre les coins opposés d'un carré par deux chemins continus (restant en dehors du carré) qui ne se rencontrent pas ?
Mathèmatiquement, on considérera le carré $C = [-1,1] \times [-1,1]$ et $f, g : [0,1] \to C$ deux applications continues $f, g : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \mathring{C}$ telles que $f(0) = (-1,-1), f(1) = (1,1), g(0) = (-1,1), g(1) = (1,-1)$. (Indication: montrer par l'absurde qu'il existe $s, t \in [0,1]$ tels que $f(s) = g(t)$ en considérant l'indice par rapport à la courbe image de f convenablement refermée.)

Solution 4. On referme l'image de f par le segment ρ reliant $C = (-1,-1)$ à $A = (1,1)$ (on note encore f cette courbe). Si f et g ne se coupent pas, il suit que les deux autres sommets $B = (-1,1)$ et $D = (1,-1)$ sont dans une même composante connexe de $\mathbb{R}^2 - f([0,1])$ (il ne peut pa sy avoir

[5] cela n'est pas 100% évident...

d'intersection dans le carré), et donc ont le même indice par rapport à f. Supposons que f soit de classe C^0 C^1PM et qu'elle coupe la demi-droite issue de B passant par D de manière transverse. Alors on peut calculer $Ind(B, f)$ en regardant l'intersection de f avec cette demi-droite et de même, on peut calculer $Ind(D, f)$ en regardant l'intersection de la même demi-droite mais issue de D et de f. Or La première intersection est exactemetn la même que la deuxième à laquelle on a rajouté un point (faire un dessin). Il suit que $Ind(D, f) = Ind(B, f) + \pm 1$ ce qui est absurde; on en déduit que f et g se coupent ! Il existe des arguments d'homotpie qui permettent de déformer f par une petite[6] homotopie de manière à se ramener aux hypothèses précédentes dans le cas où f est seulement C^0.

On peut aussi raisonner directement aussi dans ce cas. Soit $\delta > 0$ la distance de f à B ($f([0, 1])$ est compact). On remarque facilement que l'indice $Ind(f, B) = Ind(\tilde{f}, B)$ où $\tilde{f}$ est la coubre f que l'on a refermé en prenant un chemin γ qui suit le bord du carré et tourne à l'extérieur du carré autour de B à une distance $\delta/2$. Alors, $\tilde{f}$ est homotope à la composée $f \star (\star\rho \star \gamma)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{B\}$; or $Ind(\rho \star \gamma, B) = \pm 1$ ce qui assure une nouvelle fois que les indices différent... Bien-sur il faut faire un dessin pour comprendre les notations précédentes... voir la figure 1 !

Exercice 5. (**Théorème de Borsuk-Ulam en dimension 2**)
Ce théorème se formule souvent sous la forme:à tout moment, il existe deux points antipodaux sur la terre sur lesquels la température et la pression sont les mêmes.
Moins prosaïquement, Soit $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ une application continue. Montrer qu'il existe $(x, y, z) \in S^2$ tel que $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$. (*Indication:* raisonner par l'absurde et considérer l'application $(x, y, z) \mapsto \frac{f(-x,-y,-z)-f(x,y,z)}{||f(-x,-y,-z)-f(x,y,z)||}$).

Solution 5. En raisonant par l'absurde, on définit une application $g : S^2 \to S^1$ par $g(x, y, z) = \frac{f(-x,-y,-z)-f(x,y,z)}{||f(-x,-y,-z)-f(x,y,z)||}$. On a $g(x, y, z) = -g(-x, -y, -z)$. On en déduit que la restriction de g à S^1 est d'indice impair. En effet soit l'application qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $g(\exp(2i\pi t))$ et soit $\exp(2i\pi\theta(t))$ un relèvement. Alors la relation $g(\exp(2i\pi(t + 1/2))) = g(-\exp(2i\pi t) = -\exp(2i\pi\theta(t)$ assure que $\theta(t + 1/2) = 1/2 + k$ pour un entier k (indépendant de t par connexité de $\mathbb{R}$).Il suit que $\theta(1) - \theta(0) = \theta(1) - \theta(1/2) + \theta(1/2) - \theta(0) = 1 + 2k$. Mais comme l'application $g_{|S^1} : S^1 \to S^1$ se factorise au travers de la demi-sphère $S^2_+ \cong D^2$ qui est contractile, elle doit aussi être de degré nul. En effet toute application continue de $S^1 \to D^2_+$ est homotope à un point, c'est donc encore le cas de la composée $S^1 \to D^2_+ \xrightarrow{g} S^1$. ce qui est absurde !

Exercice 6. (**Additivité du degré**)
Soient $f, g : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ deux applications continues telles que $f(1) = g(1)$. On définit deux "produits" de f et g:

- $fg : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est défini par $(fg)(t) = f(t)g(t)$ pour tout $t \in S^1$.
- $f \star g(t) = f(t^2)$ pour $\operatorname{Im} t \geq 0$ et $f \star g(t) = g(t^2)$ pour $\operatorname{Im} t \leq 0$.

1. Montrer que fg et $f \star g$ sont continues, homotopes mais distinctes en général.

2. Montrer que $\deg(fg) = \deg(f \star g) = \deg(f) + \deg(g)$.

Solution 6. Il faut encore faire un dessin pour reprénter l'opération $\star$ qui consite simplement à recoller deux lacets et à les reparamétriser.

1. Il est clair[7] que les fonctions fg et $f \star g$ sont continues (pour cette dernière car $f(1) = g(1)$). Elles sont assez trivialement distinctes en général. Par exemple, si f est la fonction constante $t \mapsto 2$, $f.f(t) = 4$ alors que $f \star f(t) = f(t) = 2$... En revanche ces deux produits sont tout le temps

[6] au sens de la norme uniforme
[7] se rappeler que l'espace des fonctions continues de S^1 dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ est un groupe topologique

homotopes ! Premièrement, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ étant connexe par arcs, il existe un chemin continu qui relie $f(1) = g(1)$ à 1 et donc une homotopie reliant ces lacets à des lacets vérifiant $\tilde{f}(1) = 1 = \tilde{g} = 1$. On est donc ramené au cas $f(1) = g(1) = 1$. Remarquons que la fonction constante 1 est l'unité du produit ponctuel: $f1 = f = 1f$. Montrons que c'est aussi le cas pour $\star$ à des "homotopies près", c'est à dire que $f \star 1 \simeq 1 \star f$ pour tout f (vérifiant $f(1) = 1$ bien-sûr). C'est assez intuitif si on pense en terme de chemin ! Si on veut écrire des homotopies explicites, il suffit de considérer l'application $H : [0,1] \times S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ définie par

$$H(t, \exp(2i\pi\theta)) = \begin{cases} f\left(\exp\left(2i\pi\frac{2t}{1+u}\right)\right) & \text{pour } 0 \leq \theta \leq \frac{1+u}{2} \\ 1 & \text{pour } \frac{1+u}{2} \leq \theta \leq 1. \end{cases}$$

On vérifie que H est continue et que $H(0,t) = f \star 1(t)$ et $H(1,t) = f(t)$ pour tout t. On définit de même une homotopie explicite entre $1 \star f$ et f. Par ailleurs, il est immédiat de vérifier que si H est une homotopie entre f_0 et f_1, alors pour tout $g : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $Hg(t,u) = H(t,u)g(u)$ est une homotopie entre $f_0 g$ et $f_1 g$. On en déduit facilement que si $f_0 \simeq f_1$ et $g_0 \simeq g_1$ alors $f_0 g_0 \simeq f_1 g_1$.

Le simple fait que les unités (à des "homotopies près") coincident (et que le produit ponctuel préserve les homotopies) est maintenant suffisant pour établir le résultat. En effet, on a pour tout f, g

$$fg \simeq (f \star 1)(1 \star g) = f \star g.$$

La dernière égalité est un calcul immédiat en revenant à la définition du produit $\star$.

Remarque : on laisse au lecteur le soin de vérifier que le résultat énoncé marche avec n'importe quel groupe topologique connexe à la place de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exercice 7. (**Calcul du degré**)) Soit $f : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une application de classe C^1 et notons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\{0\}$ l'application définie par $g(\theta) = f(\exp(i\theta))$. Soit D le demi axe réel positif, c'est à dire la droite $D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0\}$. On suppose que pour tout $t \in S^1$ tel que $f(t) \in D$, f soit *transverse à* D à savoir que pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(i\theta) = t$ on a $\operatorname{Im} g'(\theta) \neq 0$. On dira que f coupe D positivement ou négativement en t suivant le signe[8] de $\operatorname{Im} g'(\theta)$ que l'on notera $\operatorname{sign}_t f$.

1. Montrer que l'ensemble $f^{-1}(D)$ est fini.

2. Soit t_1 et t_2 deux éléments de $f^{-1}(D)$ consécutifs sur le cercle. Notons $g_{t_1,t_2} : S^1 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un chemin fermé qui va de 1 à $f(t_1)$ dans D puis parcourt f entre t_1 et t_2 et revient à 1 dans D. Calculer son degré.

3. En déduire la formule
$$\deg f = \sum_{t \in f^{-1}(D)} \operatorname{sign}_t f.$$

Solution 7. 1. Comme f est continue et S^1 compact, $f(S^1) \cap D$ est un compact de D[9]. De plus D est un fermé de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, donc $f^{-1}(D)$ est fermé dans S^1 donc compact. Or les points de $f^{-1}(D)$ sont isolés, car D est transverse à $f(S^1)$; en particulier, il existe un voisinage $V(t)$ de tout point $t \in f^{-1}(D)$ tel que $\operatorname{Re}(f_{|V(t)\setminus\{t\}}) \neq 0$ en utilisant un développement de Taylor (faire un dessin !). Par conséquent, $f^{-1}(D)$ est discret et compact, donc fini !

Remarque: ceci n'a plus de raison d'être vrai si on prend des chemins non transverses à la droite ou non C^1...

[8] autrement dit selon que D coupe la courbe suivant le sens trigonométrique ou non

[9] qui est bien séparé...

CAS 1

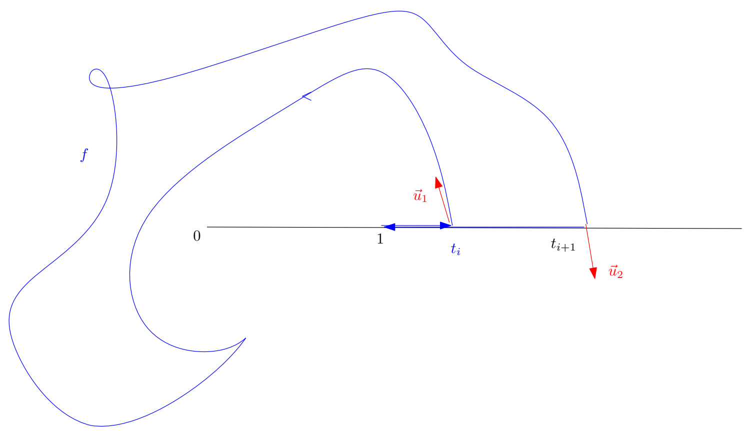

Figure 2: 1^{er} cas

2. Par construction, f ne recoupe pas la droite D entre t_1 et t_2. g_{t_1,t_2} est un lacet bien défini. Soit $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ les vecteurs tangents à $f(S^1)$ en t_1 et t_2 respectivement. Il y a 2 cas de figure à considérer:

1^{er} cas : Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ coupent D dans des sens opposés (voir figure 2). Alors, comme g_{t_1,t_2} ne recoupe pas D, il suit qu'on peut déformer par une homotopie g_{t_1,t_2} en un arc de cercle de diamètre $[f(t_1), f(t_2)]$ et donc $\deg g_{t_1,t_2} = 0 = \frac{1}{2}\big(\text{sign}_{t_1} g_{t_1,t_2} + \text{sign}_{t_2} g_{t_1,t_2}\big)$.
On peut aussi bien entendu obtenir le calcul du degré par un argument moins géométrico-intuitif. Par exemple, comme D ne recoupe pas $f(]t_1, t_2[)$, on peut choisir une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus D$ (par exemple de la forme $\log(r\exp(i\theta)) = \ln(r) + i\theta$ avec $\theta \in]0, 2\pi[$) et calculer le degré revient à calculer la différence

$$\deg(g_{t_1,t_2}) = \frac{1}{2i\pi}\left(\lim_{t\to t_2^-} \theta(f(t)) - \lim_{t\to t_1^+} \theta(f(t))\right)$$

puisque l'angle θ est fixé sur les segments rejoignant 1 à $f(t_1)$ et $f(t_2)$ à 1 (qu'on peut donc ignorer dans le calcul). On obtient alors immédiatement que $\deg(g_{t_1,t_2}) = 0$.

$2^{\text{ème}}$ cas : Les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ coupent D dans le même sens (voir figure 3). Alors, on peut voir facilement que g_{t_1,t_2} est homotope dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ à une courbe de degré 1 ou bien calculer le degré en utilisant une nouvelle fois la formule avec les limites (donnée dans le 1^{er} cas):

$$\deg(g_{t_1,t_2}) = \frac{1}{2i\pi}\left(\lim_{t\to t_2^-} \theta(f(t)) - \lim_{t\to t_1^+} \theta(f(t))\right) = \pm 1 = \frac{1}{2}\big(\text{sign}_{t_1} g_{t_1,t_2} + \text{sign}_{t_2} g_{t_1,t_2}\big).$$

Le signe $\pm$ dépend évidemment du sens dans lequel les vecteurs intersectent D.

Finalement dans tous les cas on obtient que $\deg(g_{t_1,t_2}) = \frac{1}{2}\big(\text{sign}_{t_1} g_{t_1,t_2} + \text{sign}_{t_2} g_{t_1,t_2}\big)$.

3. On note $t_1, \dots, t_n$ les points d'intersection de D et $f(S^1)$ (qui sont en nombre finis par 1.), choisis de manière consécutive. Par connexité par arcs de $\mathbb{C} \setminus 0$, il existe un arc $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus 0$ qui relie $f(1)$ à 1. On note γ^{-1} le même arc, parcouru dans le sens contraire[10] (autrement dit $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$). Alors, le lacet f est homotope à

$$f \simeq \gamma \star g_{t_1,t_2} \star \cdots \star g_{t_{n-1};t_n} \star g_{t_n,t_1} \star \gamma^{-1}. \tag{0.1}$$

[10] on vérifie (voir ci-dessous) que $\gamma\star\gamma^{-1}$ est homotope à la fonction constante $f(1)$ et $\gamma^{-1}\star\gamma$ est homotope à la fonction constante 1, ce qui justifie la notation γ^{-1} "à homotopie près"

CAS 2

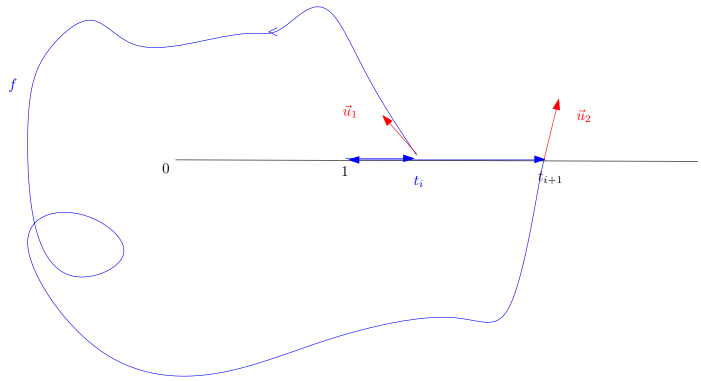

Figure 3: 2ème cas

Pour vérifier cela, il suffit de remarquer que si $p : [0,1] \to \mathbb{C} \setminus 0$, est un chemin, alors le même chemin $p^{-1}(t) = p(1-t)$ parcouru en sens inverse est un inverse "homotopique" de p, c'est à dire que $p \star p^{-1} \simeq p(0)$ et $p^{-1} \star p \simeq p(1)$; ce qui découle, par exemple, de l'homotopie $H : [0,1]^2 \to C \setminus 0$ définie par $H(t,u) = p(t)$ pour $t \leq u/2$, $H(t,u) = p(u)$ pour $u/2 \leq t \leq (1-u/2)$ et $H(t,u) = p^{-1}(t)$ pour $1 - u/2 \leq t \leq 1$. Il suit que les chemins reliant 1 à $f(t_i)$ se compensent deux à deux "à homotopie près" ce qui donne la formule (0.1). Comme $\deg(f \star g) = \deg f + \deg g$ (voir l'exercice précédent), on a

$$\begin{aligned}
\deg(f) &= \deg(g_{t_1,t_2}) + \cdots + \deg(g_{t_{n-1};t_n}) + \deg(g_{t_n,t_1}) \\
&= \frac{1}{2}\big(\big(\mathrm{sign}_{t_1} g_{t_1,t_2} + \mathrm{sign}_{t_2} g_{t_1,t_2}\big) + \cdots + \big(\mathrm{sign}_{t_n} g_{t_n,t_1} + \mathrm{sign}_{t_n} g_{t_n,t_1}\big)\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sign}_{t_i} f
\end{aligned}$$

puisque $\mathrm{sign}_{t_i} f = \mathrm{sign}_{t_i} g_{t_i,t_{i+1}} = \mathrm{sign}_{t_i} g_{t_{i-1},t_i}$ par définition.