Corrigé de la Feuille de TD 3 de Revêtements et Groupe Fondamental
Groupes et Revêtements

Rappelons la définition de revêtement vue en cours (et dans le poly). Un *revêtement* d'un espace topologique B par (un espace topologique) X est la donnée d'une application continue $p : X \to B$ telle que, pour tout point $b \in B$, il existe un voisinage U_b de b (dans B), un espace *discret* F_b *non-vide* et un homéomorphisme $\phi : p^{-1}(U_b) \to U_b \times F_b$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_b) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & U_b \times F_b \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_b & \end{tikzcd} \tag{1}$$

commutatif (ici π est la projection sur U_b). Les ouverts de la forme U_b s'appelle des *ouverts trivialisants* du revêtement. Une *section locale* est une application continue $s : V \to E$, où V est un ouvert[1] dans B, telle que $p \circ s = id$. L'ensemble $F_b \cong p^{-1}(\{b\})$ s'appelle la *fibre* de b. On prendra garde que l'homéomorphisme ϕ n'est pas unique en général (alors que F_b est unique à bijection près). Très souvent on fera un abus consistant à ne pas écrire l'indice b dans U_b ou F_b...

Exercice 1. (*Quelques propriétés des revêtements*)
Soit $p : E \to B$ un revêtement. Montrer que

1. La projection p est surjective.
2. Si E est compact (resp. connexe, connexe par arcs), alors B est compact (resp. connexe, connexe par arcs).
3. Si B est séparé, alors E est séparé.
4. Si $A \subset B$ est un sous-espace alors $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ est un revêtement.
5. Si B est connexe et si p a une fibre finie alors toutes les fibres de p ont le même cardinal.
6. Si B est compact, alors E est compact si et seulement si les fibres de p sont finies.
7. Un revêtement est un homéomorphisme local et réciproquement, si E est séparé et si p est un homéomorphisme local tel que les fibres soient finies et de même cardinal alors p est un revêtement.

Solution 1.

1. La surjectivité provient du fait que, dans la définition donnée en cours, on suppose les fibres *non-vides*. En particulier $p^{-1}(\{b\}) \cong F$ est non-vide. Ceci force aussi l'existence de sections locales. En effet, pour tout $b \in B$, U_b voisinage trivialisant et tout point $f \in F_b$, on peut définir une section $s_f : U_b \to E$ par la formule $s_f(x) = \phi^{-1}((x, f))$ qui vérifie $p \circ s_f = id$ puisque le diagramme (1) est commutatif.
2. Le seul point délicat est de montrer que E séparé implique que B est séparé. Soit $x \neq y$ deux points de B, U_x, U_y deux voisinages trivialisants et $e \in p^{-1}(\{x\})$, $f \in p^{-1}(\{y\})$ deux de leurs antécédents. En particulier $e \neq f$ (puisque $p(e) = x \neq y = p(f)$). Comme E est séparé, il en rsulte qu'il existe des voisinages ouverts disjoints V_e, V_f de e et f. Quitte à regarder les restrictions

[1] ou un voisinage, c'est à dire une partie d'intérieur non-vide

$V_e \cap p^{-1}(U_x)$ et $V_f \cap p^{-1}(U_y)$, on peut supposer que V_e, V_f sont dans U_e et U_f. Comme la projection $\pi : U_x \times F_x \to U_x$ est ouverte et que ϕ est un homéomorphisme (donc est ouverte), il suit alors que $p(V_e)$ et $p(V_f)$ sont ouverts. Il reste à voir qu'ils sont disjoints ce qui est trivial si les ouverts trivialisants U_x et U_y sont disjoints [2]. Sinon, on a deux trivialisations différentes sur l'intersection $U_x \cap U_y$ (donnée par $\phi_x : p^{-1}(U_x \cap U_y) \to U_x \cap U_y \times F$ et $\phi_y : p^{-1}(U_x \cap U_y) \to U_x \cap U_y \times F$) et comme la fibre F est discrète on peut supposer (quitte à restreindre) que $\phi(V_e)$ (est inclus dans une seule "assiette" $U_x \times \{a\}$ et que $\phi(V_f)$ est inclus dans une seule assiette $U_y \times \{b\}$ avec $b \neq a$ puisque $V_e \neq V_f$. Ceci garantit bien que $p(z) \neq p(z')$ si $z \in V_e$, $z' \in V_f$ et donc que les ouverts $p(V_e)$ et $p(V_f)$ séparent x et y.

La compacité de B découle alors de la surjetcivité de p et du fait que l'image d'un compact par une application continue à valeur dans un espaces séparé est un compact. Enfin l'image continue d'un connexe (resp. connexe par arcs) est un connexe (resp. connexe par arcs).

3. Montrons maintenant que B séparé implique aussi que E est séparé. En effet, soit $x \neq y$ dans E. Si $p(x) \neq p(y)$ dans B, il existe des voisinages disjoints U_x, U_y de $p(x)$ et $p(y)$. Alors $p^{-1}(U_x)$ et $p^{-1}(U_y)$ sont ouverts (par continuité de p), clairemetn disjoints et séparent donc x et y. Si $p(x) = p(y)$, on considère un ouvert trivialisant U de $p(x)$. Il existe alors $e \neq f$ dans $F = p^{-1}(\{p(x)\})$ tel que $x = \phi^{-1}(x, e)$ et $y = \phi^{-1}(x, f)$. Mais alors $\phi^{-1}(U \times \{e\})$ et $\phi^{-1}(U \times \{f\})$ sont des ouverts[3] disjoints qui séparent x et y.

4. C'est facile en remarquant que si U est un ouvert trivialisant, alors $U \cap A$ est un ouvert de A trivialisant puisque $p^{-1}(U \cap A) = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(A)$.

5. on considère l'application $c : B \to \mathbb{N}$ qui à un point b associe le cardinal $c(b)$ de la fibre $p^{-1}(b)$. Par définition d'un revêtement, cette application est localement constante (donc continue). En effet, si U_b est un ouvert trivialisant contenant b, c'est aussi un ouvert trivialisant pour tout point $x \in U_b$ et il suit que toutes les fibres $p^{-1}(\{x\})$ sont isomorphes à F_b dans U_b; en particulier, elles ont le même cardinal. Comme $\mathbb{N}$ est discret et B connexe, le résultat découle.

6. Si E est compact, la pré-image par p de tout point $b \in B$ est fermée[4] dans E donc compact. Comme $p^{-1}(\{b\})$ est discret, il suit qu'il est fini.

   Réciproquement, supposons que les fibres sont finies. Comme B est compact, il est séparé et donc E aussi par la question 3). Par compacité de B, il existe un recouvrement fini de B par des voisinages trivialisants, que l'on peut supposer compact[5] quitte à les restreindre. On note $K_i, \phi_i : p^{-1}(K_i) \to K_i \times F_i$ ($i \in \{1, \ldots, m\}$) un telle famille finie. Comme les fibres F_i sont finies (et discrètes), elles sont compactes et la réunion disjointe $\coprod_{i=1}^m K_i \times F_i$ l'est aussi. Soit alors $q : \coprod_{i=1}^m K_i \times F_i \to E$ l'application définie par $q(x, f) = \phi_i^{-1}(x, f)$ si $(x, f) \in K_i \times F_i$. Il est clair que q est continue et surjective. Comme E est séparé, on en déduit alros qu'il est compact.

7. Qu'un revêtement soit un homéomorphisme local est immédiat d'après la définition. Il suffit de considérer un ouvert trivialisant U_b et la restriction de p à $\phi^{-1}(U_b \times \{f\})$ pour le choix de n'importe quel élément $f \in F_b$. On laisse les détails au lecteur.

   Réciproquement, supposons E séparé et soit n le cardinal des fibres de p. En particulier, on peut identifier $p^{-1}(\{b\})$ avec l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ pour tout $b \in B$. Par énoncé, pour tout $b \in B$ et $e \in p^{-1}(\{b\})$, il existe des voisinages $V_e \subset E$, $U_e \subset B$ de e, b tel que la restriction de p à V_e soit une homéomorphisme $p_{|V_e} : V_e \to U_e$ de V_e sur U_e. On note $e_1, \ldots, e_n$ les points de la fibre de b. Comme E est séparé, quitte à restreindre (en prenant les intersections avec des voisinages qui séparent les e_i), on peut supposer les V_{e_i} deux à deux disjoints. Comme une intersection finie

[2] auquel cas on pouvait conclure tout de suite bien sur...

[3] on utilsie encore que F est discret

[4] car B compact implique que les points sont fermés, comme pour tout espace séparé d'ailleurs

[5] on rappelle qu'un espace compact est lcoalement compact, donc tout voisinage contient un voisinage compact. Cf. le cours de topologie générale, ce n'est pas complétement trivial !

d'ouvert est ouverte, $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{e_i}$ est un ouvert et (la restriction de) p est un homéomorphisme de $V_i := V_{e_i} \cap p^{-1}(U)$ sur U pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Soit $\psi : U \times \{1, \dots, n\} \to p^{-1}(U)$ l'application induite par les homéomorphismes ${p_{|V_i}}^{-1} : U \times \{i\} \cong U \to V_i$. Par construction cette application est injective (car les V_i sont 2 à 2 disjoints) et un homéomorphise sur son image (qui est $\coprod V_i$). De plus $p \circ \psi$ coincide avec la projection $U \times \{1, \dots, n\} \to U$. Il reste à voir que ψ est surjective pour conclure que c'est un homéomorphisme et donc que $p : E \to B$ est un revêtement. Mais pour tout $y \in U$, $p^{-1}(\{y\})$ est de cardinal n et $\psi(\{y\} \times \{1, \dots, n\}) \subset p^{-1}(\{y\})$ fournit n éléments distincts. D'où la surjectivité.

Exercice 2. **(Revêtements sur $\mathbb{C}$)**

1. Montrer que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un revêtement. Est-il trivial?
2. Montrer que $z \mapsto z^2$ est un revêtement de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Est-ce un revêtement de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$?
3. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe et $F \subset \mathbb{C}$ l'ensemble de ses valeurs critiques ($F = \{P(w), P'(w) = 0\}$). Montrer que $P|_{\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)} : \mathbb{C} \setminus P^{-1}(F) \to \mathbb{C} \setminus F$ est un revêtement de degré $\deg(P)$.
4. Soit $C_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \text{tels que } z_i \neq z_j \text{ pour } i \neq j\}$ et $P_n = \{X \subset \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathrm{Card}(X) = n\}$. Montrer que l'application $\phi : C_n \to P_n$ définie par $\phi(z_1, \dots, z_n) = \{z_1, \dots, z_n\}$ est un revêtement.

Solution 2.

1. Rappelons que $\exp(x) = \exp(y)$ si et seulement si $x = y + 2i\pi n$. Soit $b \in \mathbb{C}^*$. On choisit une boule (donc connexe) ouverte U contenant b et incluse dans $\mathbb{C}^*$ privé d'une demi-droite. On a alors une détermination continue *Log* du logarithme sur cet ouvert. Et de plus (voir la feuille de TD 1), deux déterminations différent d'un multiple entier de $2i\pi$; en particulier. Il suit que l'on a un homéomorphisme $\psi : U \times \mathbb{Z} \to p^{-1}(U)$ donnée par $\psi(u, n) = Log(u) + 2in\pi$. L'application ψ est clairement continue et injective (puisque $u \mapsto Log(u)$ l'est). De plus, elle est surjective par le rappel ci-dessus. Enfin elle a un inverse évident donné par $v \mapsto \left(\exp(v), \frac{1}{2i\pi}\left(v - Log(\exp(v))\right)\right)$. Cette dernière application est bien continue puisque le logarithme l'est. On a bien exhibé un ouvert trivialisant pour tout $b \in \mathbb{C}^*$ et, par conséquent, l'expponentielle est un revêtement de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$ dont les fibres sont isomorphes à $\mathbb{Z}$.

   Ce revêtement n'est pas trivial, sinon il existerait une section globale de l'exponentielle, donc une d́termination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

2. Le raisonement est identique au précédent. En choisissant une boule connexe où une détermination du logarithme est possible, on peut se ramener à une d́termination de la racine carrée. Deux telles déterminations ne peuvent différer que par leur signe, voir la feuille de TD 1, exercice 2. On prouve de même que $z \mapsto p(z) = z^2$ est un revêtement (non-trivial) à 2 feuillets de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^*$. Ce n'est pas un revêtement de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$. En effet, sinon il existerait un voisinage U de 0 tel que $p^{-1}(U)$ soit homéomorphe à $U \times F$ avec F discret. Mais pour tout point $z \neq 0$ différent de 0, $F \cong p^{-1}(\{z\})$ est de cardinal 2. En revanche $p^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ est de cardinal 1, donc F doit aussi être de cardinal ce qui est absurde!

3. Par hypothèse et le théorème d'inversion locale, $P_{|\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)}$ est un homéomorphisme local. De plus, ses fibres sont finies (de cardinal le degré de P, puisque il n'y a pas de racines multiples sur l'ensemble $\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)$). Enfin $\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)$ est le complémntaire d'un nombre fini de points dans $\mathbb{C}$, donc est connexe. PAr conséquent, les questions 5 et 7 de l'exercice 1 assure que $P|_{\mathbb{C} \setminus P^{-1}(F)} : \mathbb{C} \setminus P^{-1}(F) \to \mathbb{C} \setminus F$ est un revêtement de degré $\deg(P)$.

4. L'ensemble P_n est le quotient de C_n par l'action du groupe symétrique Σ_n (c'est à dire le groupe des permutations d'un ensemble à n éléments) donnée par $\sigma.(z_1, \dots, z_n) = (z_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, z_{\sigma^{-1}(n)})$; qui ets une action à gauche. L'action de Σ_n sur C_n est libre car les z_i sont tous distincts pour tout $z = (z_1, \dots, z_n) \in C_n$. L'action est trivialement propre puisque Σ^n est fini. Enfin, C_n est

localement compact car c'est un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Il suit que le quotient $C_n \to C_n/\Sigma_n \cong P_n$ est un revêtement à $n!$ feuilles.

Exercice 3. *(Groupes et revêtements)*

1. Soit H un sous-groupe discret d'un groupe topologique connexe G. On suppose que H est distingué dans G. Montrer que H est contenu dans le centre.

2. Soit G un groupe topologique et G_0 la composante connexe de l'identité. Déterminer les quotients topologiques G/G_0 pour
   - $G = GL(n, \mathbb{R})$
   - $G = \{f \in O_3(\mathbb{R}),\ f(\mathbb{Z} \times \{(0,0)\}) \subset \mathbb{Z} \times \{(0,0)\}\}$
   - $G = O(q)$ où $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

3. Soit H un sous-groupe discret de G. Montrer que la projection canonique $G \to G\backslash H$ est un revêtement.

4. Montrer qu'il existe un groupe simplement connexe G qui est un revêtement du tore $S^1 \times S^1$.

5. *(Partiel 2009)* Montrer que le tore n'est pas contractile.
   Indication: on considérera l'inclusion $i : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ définie par $i([x]) = [x, 0]$ et la projection $p : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par $p([x,y]) = [x]$.

Solution 3.

1. Soit $h \in H$. L'application $g \mapsto ghg^{-1}$ est continue, à valeur dans H car H est distingué. Comme G connexe, GhG^{-1} est un connexe de H qui est discret, donc un singleton. Or pour $g = 1$, $1h1^{-1} = h$, donc ce singleton c'est $\{h\}$. Il suit que pour tout $g \in G$, $ghg^{-1} = h$ et donc h est central. Conlusion: H est inclus dans le centre de G.

2. Rappelons (voir la feuille de TD 1) que G_0 est distingué, en particulier G/G_0 est un groupe.
   - Le déterminant $\det : GL(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est continue et surjectif. COmme $\mathbb{R}^*$ a 2 composantes connexes, $GL(n, \mathbb{R})$ en a au moins 2 aussi. Pour montrer que $GL(n, \mathbb{R})$ n'a que 2 composantes connexes, il suffit de voir que $GL(n, \mathbb{R})_+ = \{M, \det(M) > 0\}$ est connexe. En effet, $GL(n, \mathbb{R}) \setminus GL(n, \mathbb{R})_+$ est homéomorphe à $GL(n, \mathbb{R})_+$ via la multiplication $GL(n, \mathbb{R})_+ \ni H \mapsto M \cdot H \in GL(n, \mathbb{R}) \setminus GL(n, \mathbb{R})_+$ donnée par toute matrice de déterminant négatif M. La connexité (par arcs) de $GL(n, \mathbb{R})_+$ peut se déduire du fait que $GL(n, \mathbb{R})_+$ est engendré par les transvections et les matrices diagonales (dont le déterminant est strictement positif). On peut ramener toutes ces matrices à l'identité par un chemin continu. D'où $GL(n, \mathbb{R})/GL(n, \mathbb{R})_+ \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   - Rappelons que les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormée. Il suit alors de $f(\mathbb{Z} \times \{(0,0)\}) \subset \mathbb{Z} \times \{(0,0)\}$ que si $f \in G$, alors $f(1,0,0) = \pm 1$. L'application $G \to \{\pm 1\}$ donnée par $f \mapsto f(1,0,0)$ est continue, surjective (c'est facile à vérifier). On a donc au moins 2 composantes connexes. Soit $G_+ = \{f \in G,\ f(1,0,0) = 1\}$; clairement $\mathrm{id} \in G_+$. Une matrice de G_+ sécrit sous la forme d'un bloc $f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}$ où $A \in O_2(\mathbb{R})$, et toute matrice de cette forme est dans G_+ donc G_+ est homéomorphe à $O(2)$. Il suit que G est homéomorphe au produit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times O(2)$ a 4 composantes connexes et $G_0 \cong SO(2)$. Finalement $G/G_0 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
   - Si $M \in O(q)$, alors ${}^tMI_{2,1}M = I_{2,1}$ où $I_{2,1}$ est la matrice $\begin{bmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Il suit en prenant le déterminant que pour tout $g \in G$, $\det(g) = \pm 1$. On note $SO(q) = O(q) \cap SL_3(\mathbb{R})$. Il est clair que $-\mathrm{id}$ est dans $O(q) \setminus SO(q)$. Donc il y au moins 2 composantes connexes dans $O(q)$. De plus, comme $SO(q) \cong O(q) \setminus SO(q)$ (encore par multiplication par une

matrice de $O(q) \setminus SO(q)$), il suffit de déterminer les composantes connexes de $SO(q)$. Les éléments de $SO(q)$ préserve l'hyperboloide à 2 nappes $S = \{(x,y,z),\ q(x,y,z) = -1\}$ par définition. Notons que $(0,0,1) \in S$, donc pour tout $g \in SO(q)$, $q(g(0,0,1)) = -1$ ce qui force que $g(0,0,1) = (x_g, y_g, z_g)$ a une composante z_g non-nulle. L'application $g \mapsto z_g$ est continue puisque la composition d'une application linéaire avec un vecteur est continue. On note $SO(q)_+ = \{g \in SO(q),\ z_g > 0\}$. La matrice bloc $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ est dans $SO(q) \setminus SO(q)_+$. On en déduit que $SO(q)$ a au moins 2 composantes connexes; de plus $SO(q) \cong SO(q) \setminus SO(q)_+$. Montrons que $SO(q)_+$ est connexe (par arcs). Par définition, les rotations d'axe $(0,0,1)$ sont dans $SO(q)_+$. Soit $g \in SO(q)_+$; on note encore $g(0,0,1) = (x_g, y_g, z_g)$. Quitte à composer g par une rotation d'axe $(0,0,1)$ peut supposer que $x_g = 0$. Il suit que $z_g^2 - y_g^2 = 1$ et donc il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z_g = \cosh(t_0)$ et $y_g = \sinh(t_0)$ (cosh et sinh sont le cosinus et le sinus hyeprboliques). Par ailleurs quel que soit $t \in \mathbb{R}$, la matrice $A_t := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{bmatrix}$ est dans $SO(q)_+$, et de plus $A_t \cdot A_s = A_{t+s}$. Il vient, en composant g par A_{-t_0} que l'on peut ramèner g à une matrice de $SO(q)_+$ satisfaisant $g(0,0,1) = (0,0,1)$ en multipliant g par des rotatiosn et "rotations hyperboliques" c'est à dire des matrices de la forme A_t. Or les rotations peuvent être ramenées apr un chemin continu de rotations à l'identité et de même pour les matrices de la forme A_t (il suffit de consiérer l'application $(u, A_t) \mapsto A_{ut}$). Donc il suffit de montrer que les matrices de $SO(q)_+$ satisfaisant $g(0,0,1) = (0,0,1)$ sont connexes. Or on vérifie sans mal que ces matrices sont précisséments les roations d'axe $(0,0,1)$, donc forment un espace homéomorphe à $SO(2)$; en particulier connexe. Finalement on a montré qu'il y a 4 composantes connexes (homéomorphes entre elles) et que $O(q)_0 = SO(q)_+$. Enfin on a une suite exacte de groupes données par $SO(q) \hookrightarrow O(q) \overset{\det}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ qui ets scindée (car le sous-ensemble $\{\pm \mathrm{id}\}$ est un sous-groupe de $O(q)$). On en déduit que $O(q)/O(q)_0 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

3. Par hypothèse, H est un sous-groupe discret, donc l'unité est isolée dans H. D'où il existe U_e un voisinage de l'identité e dans G tel que $U_e \cap H = \{e\}$. D'après un théorèmedu cours, $G \to G/H$ est un revêtement.

4. On considère l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong S^1 \times S^1$. C'est un revêtement car $\mathbb{Z}^2$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$ et on peut utiliser la question précédente pour montrer que c'set un revêtement (qui n'est autre que le produit d'exponentielles bien-sûr). De plus $\mathbb{R}^2$ est contractile, donc simplement connexe.

5. Soit $i : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ l'inclusion du tore. On note $p : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'application donnée par $p([x,y]) = [x]$. On vérifie que p et i sont bien définies et continues (en effet, l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ donnée par $(x,y) \mapsto [x]$ est continue et constante sur les orbites de $\mathbb{Z}^2$, donc définit l'application continue p; on procède de même pour i). Enfin $p \circ i = \mathrm{id}$. Donc l'application $p \circ i$ n'est pas homotope à une application constante. Si le tore était contractile, il existerait une homotopie $H : [0,1] \times \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ vérifiant $H(0,-) = \mathrm{id}$ et $H(1,-)$ est constante. Alors l'application composée $K : [0,1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par $K(t,[x]) = p(H(t, i[x]))$ est continue (par composition d'applicatiosn continues) et vérifie $K(0,-) = \mathrm{id}$ et $K(1,-)$ est constante. Ceci est absurde puisque le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ n'est pas simplement connexe. Par conséquent le tore ne l'est pas non plus, a fortiori n'est aps contractile non-plus.

Exercice 4. *(Bouteille de Klein)* On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(x,y) \sim (x+1,y)$ et $(x,y) \sim (-x,y+1)$ et on note K le quotient.

1. Montrer que K est l'espace des orbites de l'opération sur $\mathbb{R}^2$ d'un sous-groupe de son groupe d'isométries.

2. Montrer que K est compact et connexe et que la projection canonique est un revêtement.

3. Construire un revêtement à deux feuillets: $S^1 \times S^1 \to K$

4. Construire un revêtement à $\mathbb{Z}$ feuillets de M sur K où M est le ruban de Möbius.

Solution 4. 1. On note t, la translation $t(x, y) = (x+1, y)$ de vecteur horizontal et r, la symétrie-glissée $r(x, y) = (-x, y+1)$ donnée par la composition d'une symétrie d'axe vertical et d'une translation verticale. Il est clair que r, t sont des isométries affines. On note $G = \langle t, h\rangle$ le sous-groupe des isométries engendré par r, t. On remarque que $trt(x, y) = (-x, y+1)$, d'où la relation $trt = r$. De cette relation on déduit que tout élément de G peut sécrire sous la forme $r^n t^m$. De plus, $r^n t^m(x, y) = ((-1)^n x + (1)^n m, y + n)$, ce qui prouve facilement que l'écriture $r^n t^m$ est unique. Par conséquent, le groupe G est le groupe $G = \{r^n t^m, n, m \in \mathbb{Z}\}$ muni de la multiplication $r^n t^m \cdot r^p t^q = r^{n+p} t^{q+(-1)^p m}$ (comme on le vérifie sans peine). Soit K un compact; alors il existe un carré $[-q, q]^2$ qui contient K. On déduit de l'écriture $r^n t^m(x, y) = ((-1)^n x + (1)^n m, y + n)$, que si $|n|$ ou $|m$ sont plus grand que $4q$, $r^n t^m(K) \cap K = \emptyset$. Par conséquent, G agit proprement sur $\mathbb{R}^2$. Il suit aussi que si deux éléments (necéssairemetn inclus dans un compact) sont dans la même classe déquivalence, ils se déduisent l'un de l'autre par une suite finie de relations d'équivalence $(x, y) \sim (x+1, y) = t(x, y)$ et $(x, y) \sim (-x, y+1) = r(x, y)$. On a donc bien que K est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par G qui est un sous-groupe du groupe des isométries.

2. On a déjà vu que G agit proprement sur l'espace localement compact $\mathbb{R}^2$. L'écriture $r^n t^m(x, y) = ((-1)^n x + (1)^n m, y + n)$ assure qu'il agit aussi librement; donc le quotient $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/G \cong K$ est un revêtement. Comme $\mathbb{R}^2$ est séparé il suit de la preuve de la question 2 de l'exercice 1 (ou du cours) que K est séparé. On voit facilement (puisque toute orbite a au moins un représentant dans le carré unité) que K est aussi le quotient de $[0, 1]^2$ par la relation $t(0, y) \cong (1, y)$ et $r(x, 0) \cong (1 - x, 1)$. Comme $[0, 1]^2$ est compact et connexe (par arcs) et K séparé, on en déduit que K est aussi compact et connexe (par arcs).

3. Le sous-groupe $< t, r^2 >$ de G induit un revêtement de K de la forme $\mathbb{R}^2/ < t, r^2 > \to \mathbb{R}^2/G \cong K$. Or $r^2(x, y) = (x, y + 2)$ est une translation. Il suit que $\mathbb{R}^2/ < t, r^2 > \cong \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ est un tore. Le revêtement a $[G : \langle t, r^2\rangle] = 2$ feuillets (d'après le cours).

4. On considère le sous-groupe $\langle r\rangle$ de G. Alors, le quotient $\mathbb{R}^2/\langle r\rangle$ est homéomorphe au ruban de Möbius. La fibre de $[0, 0]$ est le sous-groupe $\mathbb{Z} \oplus \{0\} \subset \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Exercice 5. *(Quaternions, rotations et revêtements)*

1. *Généralités sur les quaternions:*
   Soit $\mathbb{H}$ la partie de $M_2(\mathbb{C})$ formée des matrices de la forme $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. On note

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

   Enfin, si $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, on note $\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$. Montrer que

   - $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel réel de $M_2(\mathbb{C})$ de base $1, i, j, k$ doublé d'une sous-algèbre.
   - Pour tout $q \in \mathbb{H}$ on a $q\overline{q} = |q|^2$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif.
   - L'application $q \mapsto |q|$ est une norme sur H. La sphère unité de $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de H^* qui s'identifie à $\mathrm{SU}(2)$ et S^3.
   - R est un sous-corps de $\mathbb{H}$ et c'est son centre.

2. *Topologie de SO(3):* Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ l'application définie par $Q(x,y,z) = xi + yj + zk$. On appelle son image l'ensemble des quaternions purs.
   Soit $q \in \mathbb{H}^*$ et u un quaternion pur, montrer que quq^{-1} est un quaternion pur. Définissons $\phi_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $\phi_q(y) = Q^{-1}(qQ(y)q^{-1})$.

3. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a $\phi_{\lambda q} = \phi_q$ et que $\phi_q \in SO(3)$. En déduire deux applications

$$\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to \mathrm{SO}(3)$$

   Montrer que la première est un morphisme de groupe et un revêtement double et que la deuxième est un homéomorphisme.

4. *Topologie de SO(4):* Soit q_1, q_2 deux éléments de $\mathbb{H}^*$. On note $\phi_{q_1,q_2} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ l'application définie par $\phi_{q_1,q_2}(q) = q_1 q q_2^{-1}$. En déduire un morphisme de groupe de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$. Montrer que c'est un revêtement double.

Solution 5. On notera 1 la matrice identité de $M_2(\mathbb{C})$.

1. Il est clair que $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel de dimension 4 de base $1, i, j, k$ et que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. On remarque aussi que $ij = j = -ji$, $jk = i = -kj$ et $ki = j = -ik$. Il suit que $M_2(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $M_2(C)$. Enfin, les matrices diagonales $\lambda 1$ commutente avec tout élément de $M_2(\mathbb{C})$ en particulier avec ceux de $\mathbb{H}$. Comme $ij = -ji$, $ik = -ki$, on déduit d'un calcul aisé que $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}\,1$ est précisément le centre de $\mathbb{H}$.

   En revenant à l'écriture matricielle, on voit sans peine que $q\overline{q} = |a|^2 + |b|^2 = t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = |q|^2$ si $q = t + xi + yj + zk$ et $q\overline{q} > 0$ si $q \neq 0$. Donc $|q|$ s'identifie à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^4$ via l'isomorphisme $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}\langle 1, i, j, k\rangle$. On en déduit que tout élément q a un inverse $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$. En particulier, $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif (on dit aussi algèbre à divisions). Il est immédiat que $\overline{q} = t - xi - yj - zk$.

   On peut aussi remarquer que si $q = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$, alors $\overline{q}$ est la matrice transposée $\overline{q} = {}^t\overline{\begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}}$. On en déduit facilement que $|q\,q'| = |q|\,|q'|$. Il suit que la sphère unitée de $\mathbb{H}$ pour la norme $q \mapsto |q|$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$.Par définition il s'agit aussi de S^3 puisque $|q| = 1 \Leftrightarrow t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$. L'écriture matricielle l'identifie aussi à $SU(2)$ (c'est à dire les matrices complexes M de déterminant 1 et vérifiant ${}^t\overline{M}\,M = \mathrm{id}$).

2. Rappelons que l'on a identifié $\mathbb{H}$ avec $\mathbb{R}^4$ muni de la norme euclidienne. En aprticulier l'orthogonal (pour la norme $q \mapsto |q|$) de $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}\,1$ est le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}\langle i, j, k\rangle$, qui est précisément l'ensemble des quaternions purs. En particulier $|quq^{-1}| = |u|$ et donc l'application $\mathrm{Ad}_q : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ définie par $\mathrm{Ad}_q(u) = quq{-}1$ est une isométrie pour la norme (euclidienne) $u \mapsto |u|$, et de plus $\mathrm{Ad}_q(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{Ad}_q(\mathbb{R}^\perp) \subset \mathbb{R}^\perp = Q(\mathbb{R}^3)$ les quaternions purs. Par conséquent, l'image d'un quaternion pur par Ad_q est un quaternion pur. Remarquons aussi que si u est un quaternion pur alors $\overline{u} = -u$ et donc $u^2 = -|u|^2$.

3. Comme $\mathbb{R}$ est le centre de $\mathbb{H}$, il est immédiat que $\phi_{\lambda q} = \phi_q$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. On a vu dans la question 2 que Ad_q est une isométrie. De plus Q identifie les quaternions purs avec $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne. Il suit que ϕ_q est aussi une isométrie de $\mathbb{R}^3$, donc un élément de $O(3)$. Par ailleurs, l'application $u \mapsto \phi_q$ des quaternions purs dans $O(3)$ est continue (puisque la multiplication dans $\mathbb{H}$ est continue), donc son image est connexe (car les quaternions purs forment un sous-espace vectoriel, donc un connexe) dans $O(3)$. Comme $\phi_1(i) = \mathrm{id}$, par connexité, il suit que $\phi_q \in SO(3)$ pour tout $q \in \mathbb{H}^*$.

   On a donc obtenu une application ϕ de $SU(2)$ (identifié à la sphère unité de $\mathbb{H}$) dans $SO(3)$. Montrons que ϕ est surjective. Il suffit pour cela de montrer que son image continet tous les renversements, puisque ces derniers engendrent $SO(3)$. Un renversement est complétement déterminé par son axe. Soit alors $p \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul. On identifie p et $Q(p)$. Alors $\phi_p(p) = p$, donc ϕ_p est une isométrie positive qui à une droite fixe, c'est donc une rotation d'axe la droite engendrée par p. Il reste à déterminer son angle. Mais $\phi_p \circ \phi_p = \phi_{p^2} = \phi_{-|p|^2} = \phi_{-1} = \mathrm{id}$ car $p^2 = -|p|^2$ puisque p est un quaternion pur. Donc ϕ_p est d'angle 0 ou π. En prenant un quaternion pur q tel que $pq \neq qp$, on voit que ϕ_p n'est pas l'identité. C'est donc le renversement d'axe engendré par p (c'est à dire la rotation d'axe $\mathbb{R}p$ et dangle π). On a montré que $\phi : Q(\mathbb{R}) \to SO(3)$ est surjective et qu'il en est de même de sa restriction $\phi : SU(2) \to SO(3)$.

Il est immédiat que $\phi_q \circ \phi_{q'} = \phi_{qq'}$, donc $\phi : SU(2) \to SO(3)$ est un morphisme de groupe. Comme le centre de $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}$, son noyau est réduit à $\{\pm 1\}$, qui est un sous-groupe discret de $SU(2)$. Il suit de l'exercice 3 (ou du cours...) que $\phi : SU(2) \to SO(3)$ est un revêtement à 2 feuillets et que $SO(3) \cong SU(2)/\{\pm 1\} \cong S^3/\{\pm 1\} = \mathbb{R}P^3$ puisque $SU(2) \cong S^3$ d'après la question 1.

Remarque : le revêtement $\phi : SU(2) \to SO(3)$ n'est pas trivial car il n'existe pas de section (autrement dit la suite exacte $\{\pm 1\} \to SU(2) \to SO(3)$ n'est pas scindée). En effet sinon, il existerait $s : SO(3) \to SU(2)$ tel que pour tout $r \in SO(3)$, $\phi_{s(r)} = r$. Soit p un quaternion pur de $SU(2) \cong S^3$, alors $s(\phi_p) = \pm p$ et donc $(s(\phi_p))^2 = -p^2 = -1$ car p est un quaternion pur. Mais ϕ_p est le renversement d'axe $\mathbb{R}p$ (comme on l'a démontré ci-dessus), donc $(\phi_p)^2 = \mathrm{id}$ et donc, comme s est un morphisme de groupes, on a $-1 = (s(\phi_p))^2 = s((\phi_p)^2) = s_{\mathrm{id}} = 1$ ce qui est absurde !

Remarque : Comme S^3 est simplement connexe (voir la feuille de TD 4 ou le cours), on a aussi obtenu que le groupe fondamental de $SO(3)$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

4. On remarque que si q_1 et q_2 sont dans $S^3 \cong SU(2)$, alors $|\phi_{q_1,q_2}(u)| = |u|$, donc ϕ_{q_1,q_2} définit bien une application continue $SU(2) \times SU(2) \to O(4)$, qui est de plus un morphisme de groupes. On montre encore une fois par connexité qu'elle est en fait à valeur dans $SO(4)$. La surjectivité se démontre aussi comme dans la question 3. Il reste à déterminer le noyau de $\phi : SU(2) \times SU(2) \twoheadrightarrow O(4)$. Si $\phi_{q_1,q_2} = \mathrm{id}$, alors $\phi_{q_1,q_2}(q_1) = q_1$ ce qui montre que $q_2 = q_1$. On a donc $\phi_{q_1,q_1} = \mathrm{id}$ ce qui montre que q_1 est central donc, comme $q_1 \in SU(2)$, $q_1 = \{\pm 1\}$. La réciproque est immédiate. D'oùker$(\phi) = \{\pm(1,1)\}$ est un sous-groupe discret de $SU(2) \times SU(2)$, il suit que $\phi : SU(2) \times SU(2) \twoheadrightarrow SO(4)$ est un revêtement double.

   Remarque : Ce revêtement n'est pas trivial non-plus.