Corrigé de la Feuille de TD 4 de Revêtements et Groupe Fondamental
morphismes de revêtements, revêtements universels

Exercice 1. (*Van Kampen pour les espaces simplement connexes*) Soit X un espace topologique et U, V deux ouverts de X tels que $X = U \cup V$ et $U \cap V$ est connexe, non-vide. On va montrer que si U, V sont simplement connexes, il en est de même de X.

1. Soit $p : E \to X$ un revêtement de E tel que les restrictions $E_{|A}$ et $E_{|B}$ soient triviales. Montrer que E est trivial.

2. Conclure.

Solution 1. Remarquons que U, V sont connexes puisque simplement connexes. Il suit que X est nécessairement connexe.

1. Soit $\phi_U : E_{|U} \xrightarrow{\cong} U \times F$ un homéomorphisme donné par une trivialisation de $E_{|U}$ (donc $p_{|U} = \pi \circ \phi_U$). Et de même soit $\phi_V : E_{|V} \xrightarrow{\cong} V \times F'$ une trivialisation de $E_{|V}$. Puisque ϕ_U, ϕ_V commutent à la projection dans X, pour tout $b \in U \cap V$, la composée $\{b\} \times F \xrightarrow{\phi_V \circ \phi_U^{-1}} \{b\} \times F'$ est un isomorphisme de F sur F'. Par connexité de $U \cap V$, cet isomorphisme ne dépend pas du point b (en effet l'image de toute assiette $(U \cap V) \times \{f\}$, qui est connexe, par l'application continue $\phi_V \circ \phi_U^{-1}$ est incluse dans une composante connexe de $(U \cap V) \times F'$, c'est à dire une assiette $(U \cap V) \times \{f'\}$). On note $\tilde{\sigma} : F \xrightarrow{\cong} F'$ l'isomorphisme ainsi obtenu et soit $\sigma := V \times F' \to V \times F$ l'application $(x, f') \mapsto (x, \tilde{\sigma}^{-1}(f'))$. C'est un isomorphsime de revêtements et donc la composée $\psi_V : E_{|V} \xrightarrow{\sigma \circ \phi_V} V \times F$ est une trivialisation de $E_{|V}$. Par construction, les restrictions $\psi_V : E_{|U \cap V} \to (U \cap V) \times F$ et $\phi_U : E_{|U \cap V} \to (U \cap V) \times F$ sont identiques. Il suit qu'elles définissent une application $\Phi : E \to X \times F$ donnée par ϕ_U sur $E_{|U}$ et ψ_V sur $E_{|V}$. Par définition Φ est un homéomorphisme local, et surjectif et injectif par construction (puisque tout point e est soit dans $E_{|U}$, soit dans $E_{|V}$). Ainsi Φ est un homéomorphisme et donc une trivialisation globale de E.

2. Soit maintenant E un revêtement quelconque de X. Par hypothèse, $E_{|U}$ et $E_{|V}$ sont triviaux car U, V sont simplement connexes. Alors E est trivial d'après la question précédente, et donc X est simplement connexe.

Exercice 2. (*simple connexité des sphères*) Déterminer pour quelles valeures n, la sphère $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe.

Solution 2. (*simple connexité des sphères*) S^0 n'est pas connexe, donc n'est pas simplement connexe. On a vu en cours que S^1 n'est pas simplement connexe (par exemple il est revêtu non-trivialement par $\mathbb{R}$). En revanche, si $n \geq 2$, S^n est obtenu en recollant deux disques D^n le long d'une couronne centrée sur l'équateur, qui est connexe. Comme des disques sont simplement connexes, il suit de l'exercice 1 que S^n est simplement connexe.

Exercice 3. (*Automorphismes de revêtements*)

1. Déterminer tous les automorphismes du revêtement $S^1 \to S^1$ donné par $z \mapsto z^n$ ($n \geq 1$). Est-ce un revêtement galoisien ?

2. Montrer que la projection canonique $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ est un revêtement et calculer son groupe d'automorphismes.

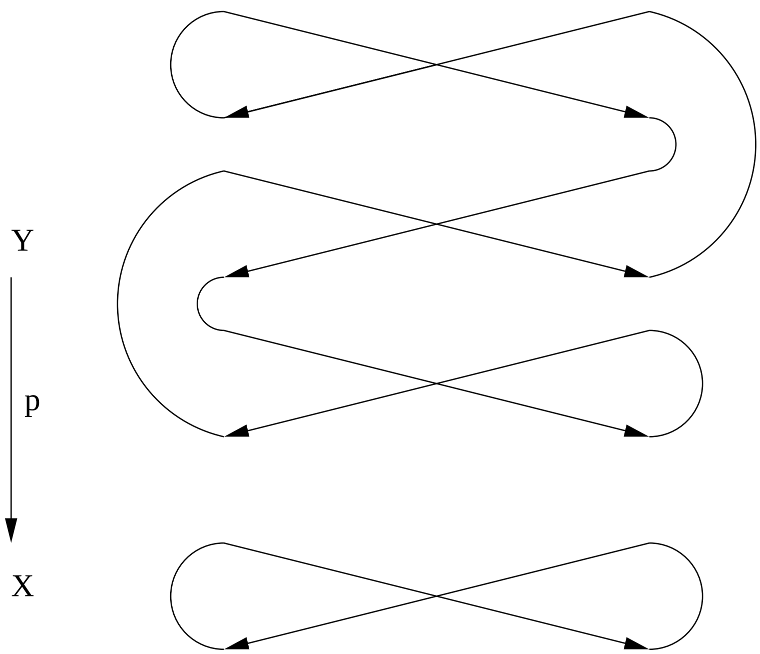


Figure 1: Le revêtement $p: Y \to X$.

3. Soient X et Y les graphes représentés ci-dessous et $p: X \to Y$ la projection "verticale" donnée par la figure:

   (a) Déterminer les automorphismes du revêtement p. Est-ce un revêtement galoisien ?

   (b) Construire un revêtement $\widehat{Y}$ de degré 2 de Y tel que $\widehat{Y}$ soit un revêtement galoisien de X et de même, constuire un revêtement $\widehat{X}$ de degré 2 de X tel que $\widehat{Y}$ soit un revêtement galoisien de degré 3 de $\widehat{X}$.

Solution 3. 1. le revêtement $z \mapsto z^n$ est galoisien car le groupe fondamental $\mathbb{Z}$ de S^1 est abélien. Ceci dit, on remarque très facilement que l'on a n automorphismes distincts du revêtements $z \mapsto z^n$ donné par $\phi_k(z) = z\exp(\frac{2i\pi k}{n})$ où $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Comme il est à n-feuilles et que ces morphismes agissent transitivement sur les fibres, on retrouve que le revêtement est galoisien et qu'il ne peut pas y avoir d'autres morphismes de revêtements. De plus $\mathrm{Aut}_{S^1} S^1 \stackrel{z\mapsto z^n}{\longrightarrow} S^1 \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (l'isomorphisme est donné par les racines de l'unité $\exp(\frac{2i\pi k}{n})$).

2. La projection $p: S^n \to \mathbb{R}P^n$ est le quotient de S^n (qui est localement compact) par le sous-groupe discret de $O(n+1)$ formé de $\pm\mathrm{id}$. Donc p est un revêtement dont le groupe des automorphismes est précisément $\{\pm\mathrm{id}\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et est galoisien (cf le cours).

3. (a) Le groupe $\mathrm{Aut}_Y(X)$ des automorphismes de X est trivial. En effet, tout automorphisme de revêtements doit permuter les points A, B, C de la figure 2. Supposons qu'il existe un automorphisme de revêtement $f: X \to X$ qui envoie A sur B. Le cercle bleu issu de A se projette, via $p: X \to Y$, sur le cercle bleu de Y. Donc, l'image par f de ce cercle bleu doit être un des arcs de cercle bleus issus de B. Or ces arcs aboutissent en $C \neq f(A)$ alors que l'arc de cercle issu de A aboutit encore en A. Ceci contredit la continuité de f (ou son injectivité). Donc tout automorphisme envoie A sur lui même. Et de même pour C. Ce qui prouve que tout automorphisme est trivial. En particulier, $p: X \to Y$ n'est pas galoisien (puisque ses automorphismes n'agissent pas transitivement sur les fibres) !

   (b) Les revêtements $\widehat{Y}$ et $\widehat{X}$ sont représentés dans la figure 2. Les arcs de cercles bleus se projetent sur les (arcs de) cercles bleus (en suivant le sens de parcours indiqué) et de même

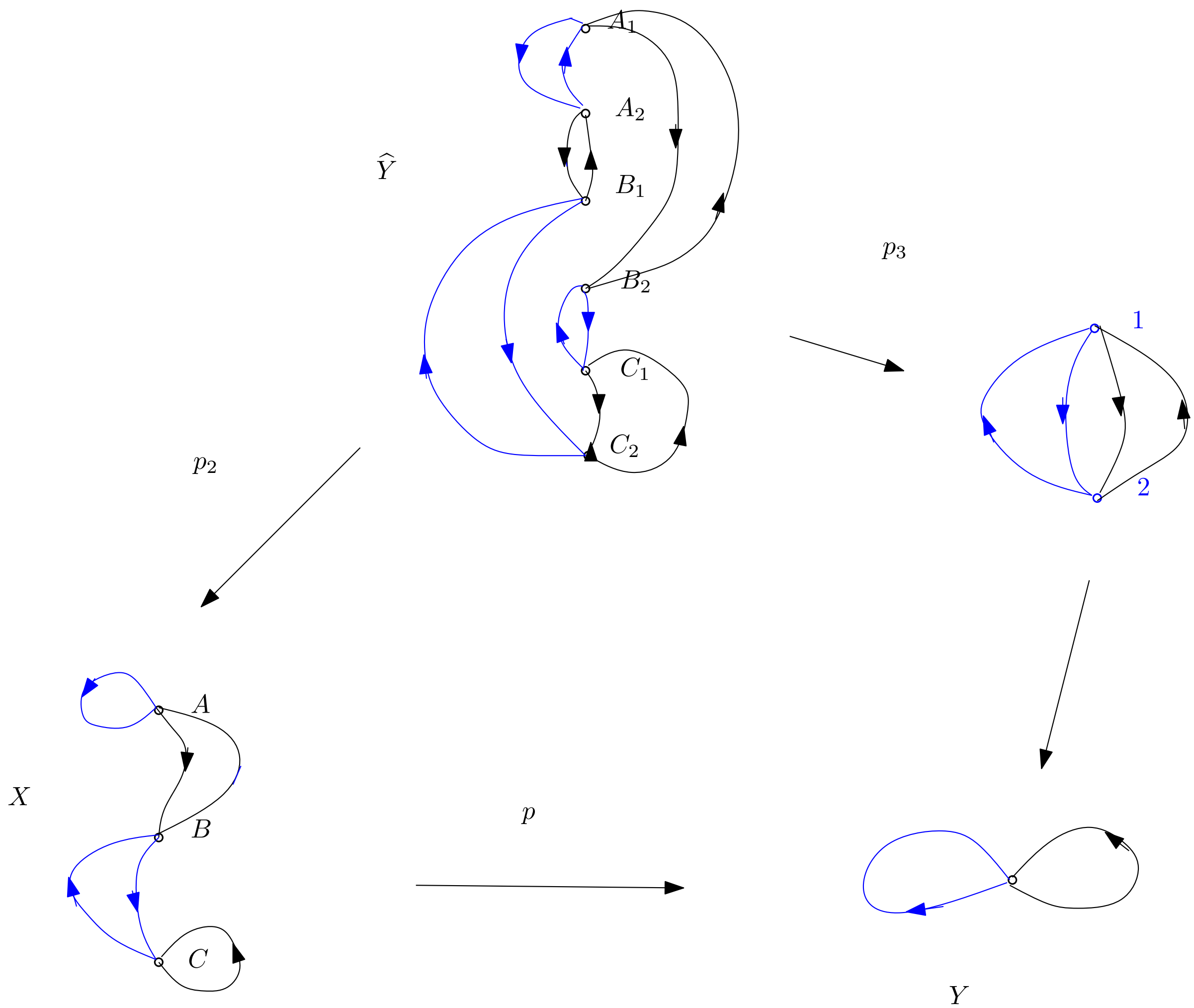


Figure 2: Les revêtements $\widehat{Y}$ et $\widehat{X}$.

pour les arcs de cercles noirs. On notera que dans $\widehat{Y}$ et $\widehat{X}$, chaque sommet s a exactement 1 arc de cercle sortant et 1 rentrant de chaque couleur (qui sont reliés à des sommets différents de s). Ceci permet de montrer que les revêtements sont galoisiens. On associe une fonction f envoyant un sommet s sur un sommet s' en envoyant les segments issus/arrivant sur s sur les sommets de même couleur et même orientation passant par s'. Ceci détermine l'image par f des 4 segments issus de s et donc de leurs extrémités différentes de s. On recommence le même procédé pour les nouveaux sommets et on vérifie qu'on construit ainsi un isomorphisme du revêtement.

Exercice 4. (*Revêtements et boucles hawaïennes*) On considère les boucles hawa"ıennes $\mathbb{H} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, c'est à dire la réunion $\mathbb{H} = \bigcup_{n>0} C_n$ des cercles C_n ($n \geq 1$) de diamètre sur l'axe réel $x = 0$ de longueur $1/n$. On note aussi $\mathbb{H}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{H},\ y \geq 0\}$ et $\mathbb{H}_- := \{(x, y) \in \mathbb{H},\ y \leq 0\}$.

1. Démontrer que $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$ sont simplement connexes. $\mathbb{H}$ est-il simplement connexe ?
2. Pour tout $n \geq 1$, construire un revêtement $p_n : E_n \to \mathbb{H}$ de $\mathbb{H}$ tel que la restriction $E_{n|C_n}$ ne soit pas trivial.
3. On note $E = \coprod_{n>0} E_n$ la réunion disjointe des E_n et $p : E \to \mathbb{H}$ l'application induite par les p_n. Montrer qu'il existe un revêtement *trivial* T de $\mathbb{H}$ tel que E soit un revêtement de T, mais que E n'est *pas* un revêtement de $\mathbb{H}$.
4. Démontrer que les restrictions $E_{p^{-1}(\mathbb{H}_+)}$ et $E_{p^{-1}(\mathbb{H}_-)}$ sont des revêtements de $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$, qui sont de plus triviaux.

Solution 4. Il est impératif de faire un dessin pour comprendre ce qui se passe ! Commençons par quelques rappels de la feuille de TD 2 sur les boucles hawaïennes. La topologie de l'espace $\mathbb{H}$ satisfait:

- une base de voisinages d'un point $x \neq (0, 0)$ dans $\mathbb{H} \cap C_n$ est donnée par des arcs de cercles usuels de C_n.
- une base de voisinages du point $(0, 0)$ est donnée par l'intersection des boules ouvertes centrée en 0 et de $\mathbb{H}$. En particulier, tout voisinage de $(0, 0)$ contient tous les cercles C_n sauf un nombre fini d'entre eux. Autrement dit, pour tout voisinage V de $(0, 0)$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $C_n \in V$.
- Enfin pour tout $n \in N$, il existe une base de voisinages de $(0, 0)$ dont l'intersection avec C_n ne contient que des arcs de cercles (isométriques à $]-\varepsilon, \varepsilon[$).

Remarque : $\mathbb{H}$ est compact, connexe par arcs, localement connexe par arcs (cf feuille de TD 2). Et de même pour $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$.

1. Démontrons la simple connexité de $\mathbb{H}_+$. On va en fait montrer que H_+ est contractile. H_+ est un bouquet d'arcs de cercles isométriques[1] aux segments $[0, \frac{\pi}{2n}]$. On contracte les arcs de cercle en 0 de manière analogue aux ocntractions de $\mathbb{R}$ en 0. Plus précisément on définit une homotopie $H : \mathbb{H}_+ \times [0, 1] \to \mathbb{H}_+$ entre l'identité et la fonction nulle comme suit. Tout point x_n de $C_n \cup \mathbb{H}_+$ s'écrit d'une manière unique comme le nombre complexe $x_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \exp(i\theta)$ où $\theta \in [0, \pi]$. On définit alors $H(x_n, t)$ par la formule
$$H(x_n, t) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \exp(i((1-t)\pi + t\theta).)$$
On a $H(-, 1) = \mathrm{id}$ et $H(-, 0) = 0$. De plus H est continue (car $\theta \in [0, \pi]$ en particulier, θ ne s'approche jamais de 2π).

[1] où $\mathbb{H}$ est muni de la métrique induite par la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$

Ceci montre que $\mathbb{H}_+$ est contractile, donc simplement connexe (et même localement simplement connexe par un argument similaire). On montre de même que $\mathbb{H}_-$ est aussi simplement connexe.

Le résultat de la question 2 montre que $\mathbb{H}$ n'est pas simplement connexe (puisque on y exhibe un revêtement non-trivial) et même non localement simplement connexe (puisque on peut trouver un tel revêtement pour tout C_n et donc dans tout voisinage de 0). On peut aussi voir que $\mathbb{H}$ n'est pas simplement connexe par arcs (ni localement simplement connexe par arcs). En effet que que soit n, on note $i_n : C8n \hookrightarrow \mathbb{H}$ l'injection canonique. On a une projection $p_n : \mathbb{H} \to C_n$ définie par $p_n(x) = x$ si $x \in C_n$ et $p_n(x) = 0$ si $x \notin C_n$. La continuité de p est évidente en tout point différent de 0. En 0, elle découle du fait qu'on peut trouver un voisinage de 0 dont l'intersection de C_n est (isométrique à) un petit intervalle (voir les remarques du début) et que tous les C_i pour $i > n$ sont envoyés sur $p_n(0) = 0$ (on remarque même que si on avait pas envoyé presque tous les C_i identiquement sur 0, la fonction p_n n'aurait pas été continue).

Clairement $p_n \circ i_n = \mathrm{id}_{C_n}$ qui n'est pas homotope à une application constante. Ceci empêche $\mathbb{H}$ d'être simplement connexe par arcs, sinon le lacet $C_n = i_n(C_n)$ serait homotope à un lacet constant et donc son image par p_n aussi.

2. On considère un revêtement $\tilde{p}_n : z \mapsto z^2$ sur ${C_n}^2$, qui est non trivial à 2 feuillets. On considère alors le revêtement trivial à 2 feuillets sur $\mathbb{H}\backslash C_n$. On recolle le revêtement sur C_n et le revêtement trivial sur $\mathbb{H}\backslash C_n$ en identifiant un à un les deux points dans la fibre de 0 dans chaque revêtement. On vérifie sans peine que cela forme un revêtement $p_n : E_n \to \mathbb{H}$ de $\mathbb{H}$. La seule difficulté est de trouver un voisinage trivialisant de 0. Il suffit de considérer un ouvert V contenant 0 tel que $V \cap C_n$ est isométrique à un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Quitte à restreindre on peut supposer que ce voisinage de 0 dans C_n est trivialisant. Alors, E_{nV} est trivial puisque E_n est aussi trivial sur $\mathbb{H} \setminus C_n$.

   Par construction, E_{nC_n} est le revêtement non-trivial à 2 feuillets de C_n.

3. La remarque clé est la suivante. Si $X \to \mathbb{H}$ est un revêtement, alors les restrictions $E_{|C_k}$ sont triviales sauf pour un nombre fini de k. En effet, il doit exister un ouvert trivialisant au voisinage de 0. Mais un tel voisinage contient tous les C_k pour k plus grand qu'un certain entier N.

   Soit $E = \coprod E_n$ et $p = \coprod p_n : E \to \mathbb{H}$. Alors pour tout n, $E_{|C_n} = E_n$, donc est non-trivial. Au vu de la remarque précédente E n'est donc pas un revêtement.

   Soit $T = \mathbb{H} \times \mathbb{N}^*$, revêtement trivial de $\mathbb{H}$. On définit $\tilde{p} : E = \coprod E_n \to T$ de la manière suivante. Tout point e de E appartient à un unique E_n. On pose alors $\tilde{p}(e) = (p(e), n) = (p_n(e), n)$. L'application p est clairement continue et c'est de plus un revêtement. En effet, pour tout point $(x, n) \in T = \mathbb{H} \times \mathbb{N}^*$, $\tilde{p}^{-1}(x, n)$ est inclus dans E_n par définition de $\tilde{p}$. Or E_n est un revêtement, donc il existe un voisinage ouvert W_e de e trivialisant pour p_n. Comme $\tilde{p}_{|E_n} = p_n$, l'ouvert $W_e \times \{n\} \subset T$ est un voisinage trivialisant de (x, n) pour p !

   Remarque : on a donc obtenu un exemple d'espace B pour lequel il existe un revêtement $X \to B$ et un revêtement $Y \to X$ tels que la composée $Y \to B$ n'est pas un revêtement.

4. On a vu que $\mathbb{H}_+$ est localement simplement connexe par arcs. Donc la composition des revêtements $T_{|\mathbb{H}_+} \to H_+$ et $E_{|T_{\mathbb{H}_+}} \to T_{|\mathbb{H}_+}$ est un revêtement de H_+. Il est trivial pusique $\mathbb{H}_+$ est simplement connexe. Le résultat pour $\mathbb{H}_-$ se démontre de même.

Exercice 5. (*Quelques revêtements universels*)

1. Déterminer les revêtements universels des sphères S^n $(n \geq 1)$, de $\mathbb{C}^*$, des espaces projectifs $\mathbb{R}P^n$, du tore $S^1 \times S^1$, de la bande de Möbius et la bouteille de Klein.

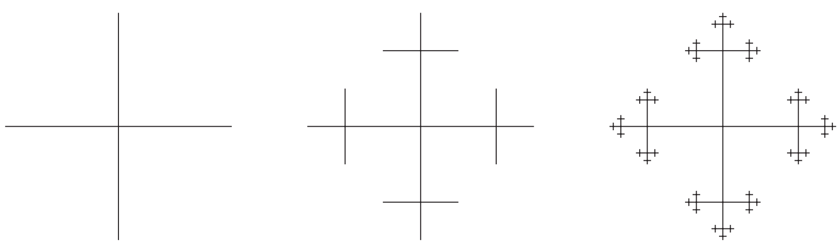
[2] qui est homéomorphe à un cercle standard

2. (*le revêtement universel du "huit"*) On construit une partie $A_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ de $\mathbb{R}^2$ par récurrence de la manière suivante (voir Figure 1).

- L'ensemble A_0 est formé du seul point 0.
- L'ensemble A_1 est formé des 4 segments $[-1,1]\times\{0\}\cup\{0\}\times[-1,1]$.
- On a un graphe formé de 4 arètes, deux horizontales et deux verticales. A distance 1/3 de l'extrémité libre de chacune, on rajoute le segment de longueur 2/3 dont l'arète est la médiatrice.
- Etape n. A distance $1/3^n$ de l'extrémité libre de chaque arête, on ajoute un segment de longueur $2/3^n$ dont notre arête est la médiatrice.

On construit ainsi une partie de $\mathbb{R}^2$ formée de segments horizontaux et verticaux se coupant orthogonalement. On munit l'ensemble A_∞ de la distance d telle que

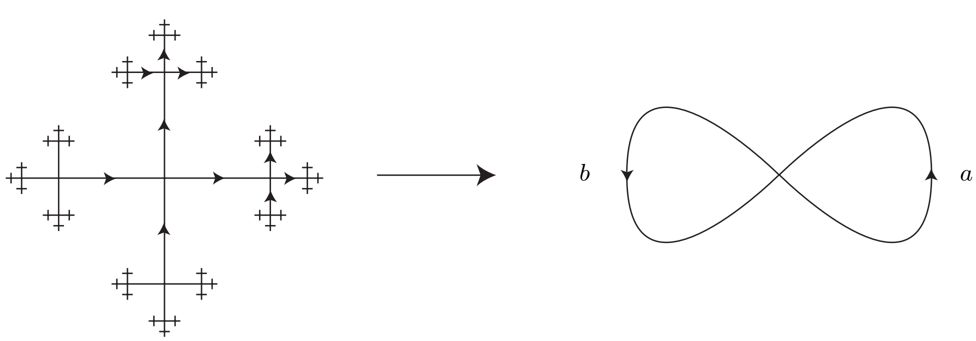
- Chaque arête est isométrique au segment $]0,1[$.
- La distance entre deux sommets est la longueur d'un chemin (sans aller-retour) dans A_∞ joignants ces deux sommets.



Étape 1 Étape 2 Étape n

(a) Montrer que A_∞ muni de la distance d est un espace métrique connexe et simplement connexe.

(b) On oriente toutes les arètes: les verticales de bas en haut et les horizontales de gauche à droite. On définit une application p de $\tilde{X}$ sur le huit en envoyant chaque arête horizontale (resp. verticale) sur la boucle a (resp. b) par un homéomorphisme (voir Figure 2). Montrer que p est le revêtement universel du huit.



Solution 5. 1. Si $n \geq 2$, S^n est simplement connexe, donc est son propre revêtement universel et il n'y a pas de revêtements non-triviaux de S^n ! Si $n = 1$, on a le revêtement $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ et $\mathbb{R}$ est simplement connexe. Donc $\mathbb{R}$ est le revêtement universel de S^1.

L'exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un revêtement (voir la feuille de TD 3 ou le cours) et $\mathbb{C}$ est simplement connexe (car contractile et localement connexe, localement contractile). Donc $\mathbb{C} \overset{\exp}{\to} \mathbb{C}^*$ est le revêtement universel de $\mathbb{C}$.

Par définition, $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de la sphère S^n par le groupe $\{\pm \mathrm{id}\}$ qui agit librement proprement sur la sphère. Il suit que S^n est le revêtement universel de $\mathbb{R}P^n$ pour $n \geq 2$. Pour $n = 1$, le revêtement universel de $S^1 \cong \mathbb{R}P^1$ est $\mathbb{R}$, donc c'est aussi le cas de $\mathbb{R}P^1$.

Le Tore $S^1 \times S^1$ est le quotient $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \cong S^1 \times S^1$ par un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est simplement connexe, c'est le revêtement universel du tore.

La bande de Möbius et la bouteille de Klein sont des quotients de $\mathbb{R}^2$ (cf la feuille de TD 3 ou le cours) par des sous-groupes agissant proprement et librement. Leur revêtement universel est donc $\mathbb{R}^2$.

2. (a) Par construction, A_∞ est un arbre (on ne fait que rajouter des arêtes n'ayant qu'un sommet commun avec le précdent graphe à chaque étape de la construction). Donc il y a un *unique* chemin parcourant l'arbre A_∞ entre deux points x, y; en particulier il est connexe. Ce chemin est de plus homéomorphe à un intervalle compact de $\mathbb{R}$ (car réunion finie de segments isométriques à [0,1]). Ceci assure aussi que $d(x, y)$ est bien défini, positif, symétrique et nul si et seulement si $x = y$. L'inégalité triangulaire découle du fait que le chemin allant de x à y et le chemin allant de y à z forme le chemin allant de x à z et il suffit alors d'appliquer l'inégalité triangulaire à un segment de $\mathbb{R}$! Soit 0 le point de A_0. On définit $H : A_\infty \times [0, 1] \to A_\infty$ comme l'application $H(t, x) = f_x^{-1}(tf_x(x))$ où f_x est l'isométrie enrte l'unique chemin allant de 0 à x et un segment $[0, d(x)]$ de $\mathbb{R}$. Par unicté du chemin, il suit que $f_x(x)$ est continue et donc H est simplement connexe par arcs. Il est aussi localement connexe par arcs (par construction). Par conséquent, A_∞ est simplement connexe.

   (b) le résultat est immédiat en remarquant qu'un revêtement du 8 est déterminé par un ensemble discret de points (correspondant à la fibre du point où les deux cercles du 8 se rencontrent) au voisinage desquels il y a 4 segments (à homéomorphisme près) qui se rencontrent et s'envoient deux à deux sur les deux boucles du 8. Donc ils sont donnés par un ensmeble discret de points reliés entre eux par des arètes de sorte qu'il n'y a que 4 arètes attachées en chaque sommet (2 rentrantes et 2 sortantes); ici on compte une boucle comme 2 arètes, à la fois rentrante et sortante. Les détails sont laissés au lecteur.

Exercice 6. (*Classifications des revêtements de quelques esapces classiques*) Décrire tous les revêtements (à isomorphisme de revêtements près)

1. de S^1
2. de $\mathbb{R}P^2$
3. de $S^1 \times S^1$
4. de la bouteille de Klein.
5. du graphe en 8, avec 2 et 3 feuillets.

Solution 6. Rappelons le résultat suivant du cours: si X est le revêtement universel d'un espace (connexe) B, alors, tout revêtement connexe de B est (isomorphe à) un quotient de X par un sous-groupe du groupe fondamental $\mathrm{Aut}_B(X)$. C'est à dire de la forme $X/H \to X/\mathrm{Aut}_B(X) \cong B$. De plus, deux revêtements X/H et X/K sont isomorphes si et seulement si les groupes H et K sont conjugués dans $\mathrm{Aut}_B(X)$ (c'est à dire qu'il existe $g \in \mathrm{Aut}_B(X)$ tel que $H = gKg^{-1}$). En particulier, si $\mathrm{Aut}_B(X)$

est abélien, deux sous-groupes distincts induisent forcément des revêtements *non*-isomorphes, et de plus, tous les revêtements sont galoisiens (car tous les sous-groupes sont distingués)

Rappelons aussi que si G est un groupe agissant continuement, proprement et librement sur un espace localement compact X (par exemple un sous-groupe discret du groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$), alors le revêtement quotient $X \mapsto X/G$ est galoisien et $\mathrm{Aut}_X(X/G) = G$.

On va utiliser les revêtements universels obtenus dans l'exercice 5.

1. Le revêtement universel $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ de S^1 est donné par l'exponentielle $t \mapsto \exp(2i\pi t)$. Un sous groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que les revêtements connexes de S^1 à isomorphismes près sont donnés par les quotients $\mathbb{R}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Notons que $\mathbb{R}/n\mathbb{Z} \cong S^1$ et que le revêtement $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \cong S^1$ est donné par l'application $t \mapsto \exp(2i\pi t/n)$. On en déduit que le revêtement $S^1 \cong \mathbb{R}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ est l'application $z = \exp(2i\pi t/n) \mapsto \exp(2i\pi t) = z^n$. On a obtenu que tout revêtement connexe de S^1 est isomorphe au revêtement universel (de fibre $\mathbb{Z}$), ou au revêtement $z \mapsto z^n$ de degré n de S^1 sur lui même (ces revêtements sont bien non-isomorphes puisqu'ils n'ont pas le même nombre de fibres).

2. L'espace $\mathbb{R}P^2$ a pour revêtement universel $S^2 \to S^2/\{\pm\,\mathrm{id}\} \cong \mathbb{R}P^2$. Il suit que tout revêtement connexe de $\mathbb{R}P^2$ est le revêtement trivial ou le revêtement universel.

3. L'application $e : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \cong S^1 \times S^1$ donnée par $(s,t) \mapsto \big(\exp(2i\pi s), \exp(2i\pi t)\big)$ est le revêtement universel du tore $S^1 \times S^1$ qui a donc pour groupe fondamental $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Il reste à dt́erminer les sous-groupes de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ (comme $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est abélien, on sait que tous les sous-groupes donneront des revêtements non-isomorphes et galoisiens). Pour cela considérons la projection $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sur le premier facteur. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, alors $p(H)$ est un sous-groupe de $p(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ donc de la forme $n\mathbb{Z}$.Soit $x \in H$ tel que $p(x) = n$; c'est à dire que x sécrit sous la forme $x = (n,a) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. De même l'intersection de H avec le deuxième facteur $\{0\} \oplus \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\{0\} \oplus \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ donc de la forme $m\mathbb{Z}$. Enfin, pour tout $h \in H$, $p(h) \in p(H)$ donc est de la forme $p(h) = n.p_h$ et donc $h - p_h(n.a) \subset H$ est inclus dans le noyau de p, donc de la forme $(0, mk)$. On a montré (les réciproques sont triviales) que H est le sous-groupe engendré par (n,a) et $(0,m)$. On peut de plus, si m est non nul, supposer que $a < m$ (en regardant $(n, a + km) \in H$ pour un certain k). On conclut que les sous-groupes de H sont soit de la forme $(a,b)\mathbb{Z}$, soit de la forme $(n,a)\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z}$ où $n, m > 0$ et $a < m$.

   Dans le premier cas, c'est à dire $H = (a,b)\mathbb{Z}$, on obtient[3] le revêtement universel (si $a = b = 0$) ou le revêtement par un cylindre $S^1 \times \mathbb{R} \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(a,b)\mathbb{Z} \to (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \cong S^1 \times S^1$ qui peuvent sécrire sous la forme $(z,t) \mapsto (z^a, z^b \exp(2i\pi t))$ (si $a \neq 0$) ou sous la forme $(z,t) \mapsto (z^a \exp(2i\pi t), z^b)$ (si $b \neq 0$) [4].

   Dans le deuxième cas, celui où $H = (n,a)\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z}$avec $n, m > 0$ et $a < m$, on obtient des revêtements du tore par lui-même: $S^1 \times S^1 \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(n,a)\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z} \to (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \cong S^1 \times S^1$ qui sont de la forme $(z,w) \mapsto (z^n, z^a w^m)$ et ont $\frac{nm}{\mathrm{pgcd}(n,m)}$-feuilles.

4. La bouteille de Klein K est le quotient de $\mathbb{R}^2$ par le sous-groupe discret $G = \langle t, h \rangle$ des isométries de $\mathbb{R}^2$ engendré par la translation $t(x,y) = (x+1, y)$ et la symétrie glissée $r(x,y) = (-x, y+1)$ (cf la feuille de TD 3). Les revêtements (à isomorphisme près) de K sont donc donnés par les quotients de $\mathbb{R}^2$ par les sous-groupes de G. On a la relation $trt = r$ et tout élément de G sécrit de manière unique sous la forme $r^n t^m$ et on a la relation $r^n t^m \cdot r^p t^q = r^{n+p} t^{q+(-1)^p m}$. On remarque que $rtr^{-1} = t^{-1}$ d'où il suit que le sous-groupe (des translations horizontales de longueur entière) $\langle t \rangle \subset G$ est distingué. Bien-sûr, $\langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$ et le sous groupe-quotient $G/\langle t \rangle$ est isomorphe au sous-groupe $\mathbb{Z} \cong \langle r \rangle \subset G$ (vu l'uncité de l'écriture $r^n t^m$ d'un élément de G). E particulier, on a une

[3] faire un dessin !

[4] on pourra aussi remarquer que si $a, b \neq 0$, alors il y a un isomorphisme de revêtements $(z,t) \mapsto (z \exp(2i\pi t), -b/a\, t)$ entre les deux formes proposées du revêtement $(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(a,b)\mathbb{Z} \to (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \cong S^1 \times S^1$.

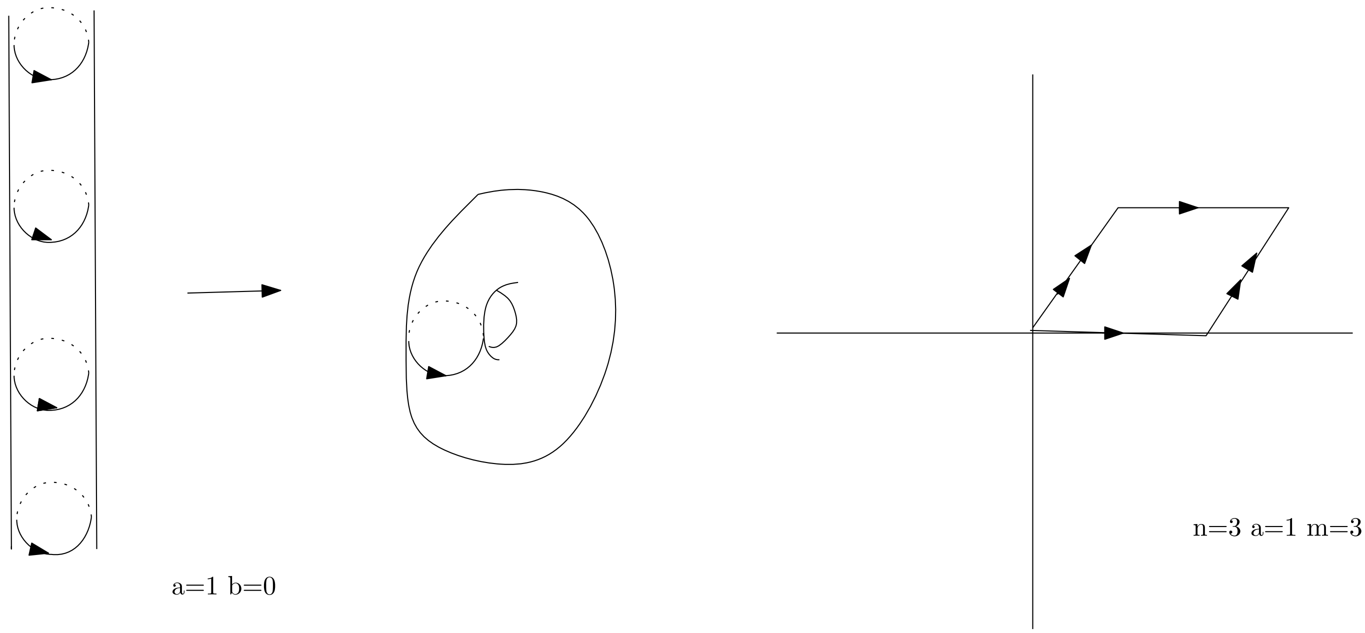


Figure 3: Les revêtements du tore asssocié aux groupes $(1,0)\mathbb{Z}$ et $(n,a)\mathbb{Z}\oplus m\mathbb{Z}$.

suite exacte courte de groupes $\mathbb{Z}\cong\langle t\rangle \hookrightarrow G \twoheadrightarrow G/\langle t\rangle\cong\mathbb{Z}$ et on note $p: G\to G/\langle t\rangle$ l'application quotient. On montre comme dans le cas de $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ ci-dessus[5] que tout sous-groupe H de G est

- soit engendré par un élément de la forme r^at^b et donc isomorphe à $\mathbb{Z}$ (si a ou b non-nul) ou trivial;
- soit engendré par deux générateurs de la forme r^nt^p, t^m avec $n\neq 0$, $m>0$ et $0\leq p<m$.

Considérons le premier cas: on a $r^at^b(x,y)=((-1)^ax+(-1)^ab,y+a)$. Donc r^at^b est une translation si a est pair. Si a est impair, alors r^at^b est la composée de la symétrie par rapport à la droite verticale passant par $(-b/2,0)$ et de la translation de vecteur vertical $(0,a)$. Il suit que si a est pair, $\mathbb{R}^2/\langle r^at^b\rangle$ est homéomorphe à un cylindre $\mathbb{R}\times S^1$ et que si a est impair $\mathbb{R}\times S^1$ est homéomorphe au ruban de Möbius (non-borné) $\mathbb{R}^2/(x-b/2,y)\sim(-(x-b/2),y+a)$.

Dans le deuxième cas, on a que $r^nt^p(x,y)=((-1)^nx+(-1)^np,y+n)$ qui est une translation si n est pair et encore une symétrie-glissée si n est impair. Donc, si n est pair, le revêtement $\mathbb{R}^2/\langle r^nt^p,t^m\rangle\to\mathbb{R}^2/G=K$ est un revêtement de la bouteille de Klein par un quotient de $\mathbb{R}^2$ par deux translations non-parallèles, c'est à dire par un tore $S^1\times S^1$. C'est un revêtement à $\frac{nm}{\mathrm{pgcd}(p,m)}$ feuillets.
Si n est impair, on obtient de même un revêtement de la bouteille de Klein par elle-même à $\frac{nm}{\mathrm{pgcd}(p,m)}$ feuillets.

on vérifie sans peine que le groupe $\langle r^at^b\rangle$ est distingué (et donc el revêtement associé est galoisien) si et seulement si a est pair (il suffit de conjugué le générateur par t) et que le groupe $\langle r^nt^p,t^m\rangle$ est distingué si et seulement si n est pair. Enfin si deux groupes sont les mêmes, il suit que leur intersection avec $\langle t\rangle$ sont les mêmes et leurs projections sur $G/\langle t\rangle$ sont aussi les mêmes. On en déduit, qu'ils ont le même nombre de générateurs et que ces générateurs coincident (au signe des exposants près).

5. On a représenté les revêtements à 2 feuillets du huit sur la figure suivante Le point important est

[5] attention, G n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$; il n'est même pas abélien

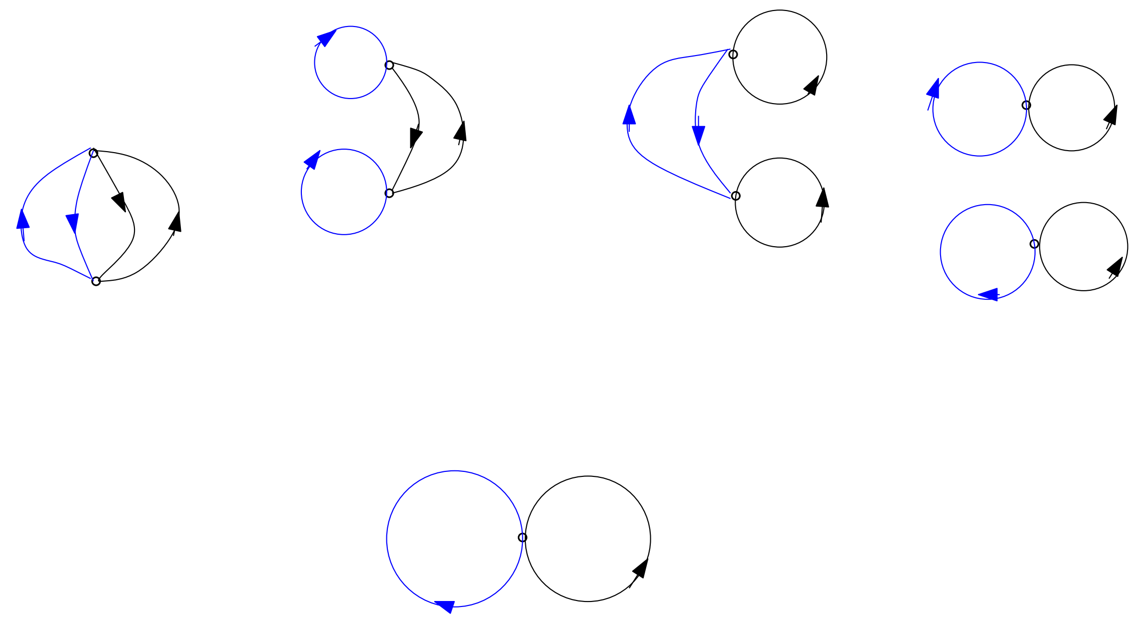


Figure 4: Les revêtements du huit à 2 feuillets.

qu'un revêtement du 8 est obtenu comme un quotient de l'arbre quadrivalent A_∞ de l'exercice 5. Il s'agit donc d'un graphe avec autant de sommets (qui sont les préimages du point d'intersection des deux cercles composant le 8) que de feuilles auxquels sont attachés 4 arètes (2 rentrantes et 2 sortantes); ici on compte une boucle comme 2 arètes, à la fois rentrante et sortante. De plus la restriction d'un revêtement du 8 à chaque cercle donne un revêtement du cercle. Il est alors facile de voir qu'il y a au plus 4 revêtements (2 pour chaque boucle du 8) à 2 feuillets du 8 (à isomorphisme près) et que les 4 possibles sont *non*-isomorphes.

De même il y a 10 revêtements à 3 feuillets du 8 (dont 8 de connexes).