

Feuille de TD 1 de Revêtements et groupe Fondamental Logarithme, théorème du relèvement et rappels de topologie

Exercice 1. (Logarithme complexe)

1. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et f une fonction holomorphe sur U telle que pour tout z dans U on a $f'(z) = 1/z$ et telle qu'il existe z_0 dans U avec $\exp(f(z_0)) = z_0$.
 - (a) Montrer que f est une détermination (holomorphe donc) du logarithme, c'est-à-dire que pour tout z dans U on a $\exp(f(z)) = z$.
 - (b) Peut-on trouver une telle fonction pour $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$?
2. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur lequel il existe une détermination du logarithme. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall z \in U, \quad f(z)^n = z.$$

Combien existe-t-il de telles fonctions?

3. On considère les deux séries

$$f_1(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}, \quad f_2(z) = i\pi + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$$

Montrer qu'il existe un ouvert connexe contenant les disques ouverts de rayon 1 et de centre 0 et 2 ainsi qu'une fonction g analytique sur U qui coïncide respectivement avec f_1 et f_2 sur chacun de ces deux disques.

Exercice 2. (groupes et topologie) Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G (muni de la topologie induite).

1. Montrer que si H est ouvert (dans G), alors H est fermé.
2. Montrer que G est séparé si et seulement si le singleton $\{1\}$ est fermé dans G .
3. Montrer que si G est connexe, alors il est engendré par tout voisinage non-vide de 1.
4. Montrer que la composante connexe G_0 de 1 est un sous-groupe fermé et distingué¹.

Exercice 3. (Relèvement des angles) Soit $P(S^1) := \{f : [0, 1] \rightarrow S^1, f \text{ continue}\}$ l'ensemble des applications continues de l'intervalle dans le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}$ et $P(\mathbb{R}) := \{f : [0, 1] \rightarrow S^1, f \text{ continue}\}$ l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle dans \mathbb{R} . On munit $P(\mathbb{R})$ et $P(S^1)$ de la topologie de la convergence uniforme.

1. Montrer que les structures de groupe naturelle de $(S^1; \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +)$ font de $P(S^1)$ et $P(\mathbb{R})$ des groupes topologiques (où la multiplication est ponctuelle).
2. Montrer que l'exponentielle $t \mapsto \exp(it)$ induit un morphisme de groupes topologiques $P(\mathbb{R}) \xrightarrow{e} P(S^1)$ dont l'image est ouverte.
3. Montrer que $P(S^1)$ est connexe et en déduire le théorème de relèvement des angles.

¹on dit aussi normal, surtout en anglais

Exercice 4. (Problème de croisement) Peut on joindre les coins opposés d'un carré par deux chemins continus (restant en dehors du carré) qui ne se rencontrent pas ?

Mathématiquement, on considérera le carré $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$ et $f, g : [0, 1] \rightarrow C$ deux applications continues $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \overset{\circ}{C}$ telles que $f(0) = (-1, -1), f(1) = (1, 1), g(0) = (-1, 1), g(1) = (1, -1)$. (Indication: montrer par l'absurde qu'il existe $s, t \in [0, 1]$ tels que $f(s) = g(t)$ en considérant l'indice par rapport à la courbe image de f convenablement refermée.)

Exercice 5. (Théorème de Borsuk-Ulam en dimension 2)

Ce théorème se formule souvent sous la forme: à tout moment, il existe deux points antipodaux sur la terre sur lesquels la température et la pression sont les mêmes.

Moins prosaïquement, Soit $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue. Montrer qu'il existe $(x, y, z) \in S^2$ tel que $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$. (Indication: raisonner par l'absurde et considérer l'application $(x, y, z) \mapsto \frac{f(-x, -y, -z) - f(x, y, z)}{\|f(-x, -y, -z) - f(x, y, z)\|}$).

Exercice 6. (Additivité du degré)

Soient $f, g : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ deux applications continues telles que $f(1) = g(1)$. On définit deux "produits" de f et g :

- $fg : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est défini par $(fg)(t) = f(t)g(t)$ pour tout $t \in S^1$.
- $f \star g(t) = f(t^2)$ pour $\text{Im } t \geq 0$ et $f \star g(t) = g(t^2)$ pour $\text{Im } t \leq 0$.

1. Montrer que fg et $f \star g$ sont continues, homotopes mais distinctes en général.
2. Montrer que $\text{deg}(fg) = \text{deg}(f \star g) = \text{deg}(f) + \text{deg}(g)$.

Exercice 7. (Calcul du degré) Soit $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une application de classe C^1 et notons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'application définie par $g(\theta) = f(\exp(i\theta))$. Soit D le demi axe réel positif, c'est à dire la droite $D = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z = 0, \text{Re } z > 0\}$. On suppose que pour tout $t \in S^1$ tel que $f(t) \in D$, f soit *transverse* à D à savoir que pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(i\theta) = t$ on a $\text{Im } g'(\theta) \neq 0$. On dira que f coupe D positivement ou négativement en t suivant le signe² de $\text{Im } g'(\theta)$ que l'on notera $\text{sign}_t f$.

1. Montrer que l'ensemble $f^{-1}(D)$ est fini.
2. Soit t_1 et t_2 deux éléments de $f^{-1}(D)$ consécutifs sur le cercle. Notons $g_{t_1, t_2} : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un chemin fermé qui va de 1 à $f(t_1)$ dans D puis parcourt f entre t_1 et t_2 et revient à 1 dans D . Calculer son degré.
3. En déduire la formule

$$\text{deg } f = \sum_{t \in f^{-1}(D)} \text{sign}_t f.$$

²autrement dit selon que D coupe la courbe suivant le sens trigonométrique ou non