Feuille de TD 2 de Revêtements et groupe Fondamental: constructions d'espaces topologiques, un peu d'homotopie

Exercice 1. *(Topologie quotient et séparation)* Soit X un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On note $p : X \to X/\mathcal{R}$ l'application canonique. Pour $S \subset X$ on appelle *saturé de S* le sous-ensemble $p^{-1}(p(S)) = \{y \in X, \exists x \in X, x\mathcal{R}y\}$. On dira que $\mathcal{R}$ est ouverte si le saturé de tout ouvert est ouvert.

1. Montrer qu'il existe un unique (à homéomorphisme près) espace topologique $\widetilde{X}$ et application continue $\pi : X \to \widetilde{X}$, constante sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{R}$, tels que pour toute application continue $f : X \to Y$ qui est constante sur chaque classe d'équivalence de $\mathcal{R}$, il existe une unique application continue $\tilde{f} : \widetilde{X} \to Y$ qui relève f, c'est à dire telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$. Décrire explicitement cette topologie. A quelle condition une application $g : \widetilde{X} \to Z$ est-elle continue ? Montrer que si f est ouverte, $\tilde{f}$ est ouverte.

2. Montrer que si X est connexe alors $\widetilde{X}$ est connexe. Même question avec connexe par arcs.

3. Montrer que si le graphe $\mathcal{R} = \{(x, y),\ x\mathcal{R}y\} \subset X \times X$ est fermé et $p : X \to X/\mathcal{R}$ est ouverte, alors $X/\mathcal{R}$ est séparé.

4. Donner un exemple d'espace séparé X et de relation $\mathcal{R}$ tels que $X/\mathcal{R}$ soit muni de la topologie grossière. Donner un exemple d'espace non-séparé tel que $X/\mathcal{R}$ soit séparé.

5. On suppose maintenant X compact (en particulier séparé). Montrer que si le graphe de $\mathcal{R}$ est fermé, alors $X/\mathcal{R}$ est compact (en particulier séparé).

6. Montrer que le quotient de $\mathbb{R}^2$ par la relation $(x, y) \sim (2x, 2y)$ n'est pas séparé tandis que le quotient de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par la même relation l'est.

Exercice 2. *(cônes, espaces des chemins, recollements ...)* Soit X un espace topologique et $f : X \to Y$ une application continue.

1. Le **cône sur** X est l'espace topologique quotient $C(X) := (X \times [0, 1])/\big((x, 1) \sim (y, 1)\big)$.
   (a) Montrer que X s'identifie[1] à un sous-espace fermé de $C(X)$ et qu'il existe une application naturelle $C(f) : C(X) \to C(Y)$ induite par f.
   (b) Montrer que $C(X)$ est *contractile.*
   (c) Montrer que si X est séparé, $C(X)$ est séparé.

2. Soit X, Y deux espaces topologiques, A une partie non-vide de X et $f : A \to Y$, une application continue. Le **recollement de** X **sur** Y **par** f est l'espace topologique quotient
$$X \cup_f Y := (X \coprod Y)/\big(x \sim f(x),\ x \in A\big).$$
   (a) Que peut on dire si il existe deux applications continues $g : X \to Z$, $h : Y \to Z$ qui vérifie $g(a) = h \circ f(a)$ pour tout $a \in A$? Montrer que si $Z \subset X$ est un sous-espace non-vide de X, l'espace quotient X/Z s'identifie à un recollement.
   (b) Montrer que $X \cup_f Y$ est connexe (resp. par arcs) si X et Y sont connexes (resp. par arcs).
   (c) Montrer que si A est fermé, alors Y s'identifie à un sous-espace de $X \cup_f Y$. Si de plus X, Y sont compacts, montrer que $X \cup_f Y$ est compact. En particulier si F est un fermé d'un compact X, X/F est compact.

[1] c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme entre X et un sous-espace de $C(X)$.

3. Le **cylindre de** f est le recollement $Cyl(f) := X \times [0,1] \cup_{f\times\{0\}} Y$ où $f \times \{0\}$ est donné par $f \times \{0\} : X \times \{0\} \cong X \xrightarrow{f} Y$. Le **cône de** f est le recollement $C(f) := C(X) \cup_{f\times\{0\}} Y$. Montrer que si $\psi : Y \to Y'$ est une homotopie alors $Cyl(f)$ et $C(f)$ sont respectivement homotopes à $Cyl(\psi \circ f)$ et $C(\psi \circ f)$.

4. Soit $x \in X$ un point de X. On note $PX = \{f : [0,1] \to X, f(0) = x\}$ l'**espace des chemins** (issus de x) que l'on munit de la topologie suivante: une (pré-)base d'ouvert est formée par les sous-ensembles $W(K,V) = \{f \in PX, f(K) \in V\}$ où K parcourt les compacts de $[0,1]$ et V les ouverts de X. Montrer que PX est contractile.

Exercice 3. *(Le bonnet d'âne)* Soit T un triangle dans $\mathbb{R}^2$ (avec son interieur) et notons p, q, r ses sommets. On appelle bonnet d'âne le triangle dont on a identifié les arètes de la façon suivante: $[p,q]$ avec $[q,r]$ et $[p,q]$ avec $[p,r]$. Montrer que le bonnet d'âne est un espace contractile (en l'identifiant au cône d'une application du cercle dans lui-même).

Exercice 4. *(Compactifié d'Alexandroff)* Soit X un espace topologique localement compact. On note $\widehat{X}$ l'espace X auquel on adjoint un point noté ∞.

1. Montrer que $\widehat{X}$ possède une unique topologie telle que
   - la topologie induite sur X soit la topologie de X
   - les voisinages ouverts de ∞ sont les ensembles de la forme $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ pour $K \subset X$ compact.

   Démontrer que $\widehat{X}$ est compact.

2. Montrer que $\widehat{\mathbb{R}^n}$ est homéomorphe à S^n (Considérer la projection stéréographique).

3. Identifier les espaces $\widehat{\mathbb{C}^*}$ et $\widehat{M}$ où M est la bande de Möbius définie par $M = \mathbb{R}^2/(x,y) \sim (x+1,-y)$.

Exercice 5. *(boucles, bouquet de cercles ...)* On considére les espaces topologiques quotients $A = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ par le sous-espace $\mathbb{Z}$ et

$$B = S^1/\big(\{1\} \cup \{\exp(2i\pi/n),\, n \in \mathbb{N}^*\}\big),$$

ainsi que les sous-espaces du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ donné par la réunion R_1 des cercles de rayon $n \in \mathbb{N}$ et tangents en $(0,0)$ à l'axe $y=0$, la réunion R_2 des cercles de rayon[2] $1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et tangents en $(0,0)$ à l'axe $x=0$ et enfin l'espace $\bigvee_{\mathbb{Z}} S^1$ donné par le recollement de $X = \coprod_{\mathbb{Z}} S^1$ sur le point $Y = \{pt\}$ par l'unique application $f : F \to \{pt\}$ où F est une réunion de points (on choisit exactement un point par cercle). Dire lesquels parmi ces espaces sont homéomorphes entre eux, et lesquels sont homotopes.

Exercice 6. *Un collage classique* Montrer que S^3 est obtenue en recollant deux "tores pleins" $D^2 \times S^1$ au moyen de l'application identique

$$D^2 \times S^1 \supset S^1 \times S^1 \to^{\mathrm{Id}} S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2.$$

Indication: On identifiera S^3 au sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ défini par l'équation $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ et les tores pleins aux sous-ensembles définis par $|z_1| \leq |z_2|$ et $|z_1| \geq |z_2|$.

Exercice 7. *Configurations de 3 points distincts dans* $\mathbb{C}$

1. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ se rétracte par déformation sur l'ensemble X formé de la réunion des cercles de centre 0 et 1 et de rayon $1/2$.

2. Montrer que $C_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 \neq z_2\}$ se rétracte par déformation sur S^1 identifié à l'ensemble des couples $(0,u)$ pour $u \in S^1$.

3. Montrer que $C_3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \text{distincts}\}$ se rétracte par déformation sur $S^1 \times X$ identifié à l'ensemble des triplets $(0, u, uv)$ pour $u \in S^1$ et $v \in X$.

[2] on l'appelle parfois espace des boucles hawaiennes