Feuille de TD 3 de Revêtements et groupe Fondamental
Groupes et revêtements

Exercice 1. (*Quelques propriétés des revêtements*)
Soit $p : E \to B$ un revêtement. Montrer que

1. La projection p est surjective.
2. Si E est compact (resp. connexe, connexe par arcs), alors B est compact (resp. connexe, connexe par arcs).
3. Si B est séparé, alors E est séparé.
4. Si $A \subset B$ est un sous-espace alors $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ est un revêtement.
5. Si B est connexe et si p a une fibre finie alors toutes les fibres de p ont le même cardinal.
6. Si B est compact, alors E est compact si et seulement si les fibres de p sont finies.
7. Un revêtement est un homéomorphisme local et réciproquement, si E est séparé et si p est un homéomorphisme local tel que les fibres soient finies et de même cardinal alors p est un revêtement.

Exercice 2. (**Revêtements sur $\mathbb{C}$**)

1. Montrer que $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un revêtement. Est-il trivial?
2. Montrer que $z \mapsto z^2$ est un revêtement de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Est-ce un revêtement de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$?
3. Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe et $F \subset \mathbb{C}$ l'ensemble de ses valeurs critiques ($F = \{P(w), P'(w) = 0\}$). Montrer que $P|_{\mathbb{C}\setminus P^{-1}(F)} : \mathbb{C} \setminus P^{-1}(F) \to \mathbb{C} \setminus F$ est un revêtement de degré $\deg(P)$.
4. Soit $C_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \text{tels que } z_i \neq z_j \text{ pour } i \neq j\}$ et $P_n = \{X \subset \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathrm{Card}(X) = n\}$. Montrer que l'application $\phi : C_n \to P_n$ définie par $\phi(z_1, \dots, z_n) = \{z_1, \dots, z_n\}$ est un revêtement.

Exercice 3. *(Groupes et revêtements)*

1. Soit H un sous-groupe discret d'un groupe topologique connexe G. On suppose que H est distingué dans G. Montrer que H est contenu dans le centre.
2. Soit G un groupe topologique et G_0 la composante connexe de l'identité. Déterminer les quotients topologiques G/G_0 pour
   - $G = GL(n, \mathbb{R})$
   - $G = \{f \in O_3(\mathbb{R}),\ f(\mathbb{Z} \times \{(0,0)\}) \subset \mathbb{Z} \times \{(0,0)\}\}$
   - $G = O(q)$ où $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.
3. Soit H un sous-groupe discret de G. Montrer que la projection canonique $G \to G\backslash H$ est un revêtement.
4. Montrer qu'il existe un groupe simplement connexe G qui est un revêtement du tore $S^1 \times S^1$.

5. *(Partiel 2009)* Montrer que le tore n'est pas contractile.
   Indication: on considérera l'inclusion $i : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ définie par $i([x]) = [x, 0]$ et la projection $p : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par $p([x, y]) = [x]$.

Exercice 4. *(Bouteille de Klein)* On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(x, y) \sim (x + 1, y)$ et $(x, y) \sim (-x, y + 1)$ et on note K le quotient.

1. Montrer que K est l'espace des orbites de l'opération sur $\mathbb{R}^2$ d'un sous-groupe de son groupe d'isométries.

2. Montrer que K est compact et connexe et que la projection canonique est un revêtement.

3. Construire un revêtement à deux feuillets: $S^1 \times S^1 \to K$

4. Construire un revêtement à $\mathbb{Z}$ feuillets de M sur K où M est le ruban de Möbius.

Exercice 5. *(Quaternions, rotations et revêtements)*

1. *Généralités sur les quaternions:*
   Soit $\mathbb{H}$ la partie de $M_2(\mathbb{C})$ formée des matrices de la forme $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. On note

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

   Enfin, si $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, on note $\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$. Montrer que

   - $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel réel de $M_2(\mathbb{C})$ de base $1, i, j, k$ doublé d'une sous-algèbre.
   - Pour tout $q \in \mathbb{H}$ on a $q\overline{q} = |q|^2$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif.
   - L'application $q \mapsto |q|$ est une norme sur H. La sphère unité de $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de H^* qui s'identifie à $\mathrm{SU}(2)$ et S^3.
   - R est un sous-corps de $\mathbb{H}$ et c'est son centre.

2. *Topologie de SO(3):* Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ l'application définie par $Q(x, y, z) = xi + yj + zk$. On appelle son image l'ensemble des quaternions purs.
   Soit $q \in \mathbb{H}^*$ et u un quaternion pur, montrer que quq^{-1} est un quaternion pur. Définissons $\phi_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $\phi_q(y) = Q^{-1}(qQ(y)q^{-1})$.

3. Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a $\phi_{\lambda q} = \phi_q$ et que $\phi_q \in SO(3)$. En déduire deux applications

$$\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to \mathrm{SO}(3)$$

   Montrer que la première est un morphisme de groupe et un revêtement double et que la deuxième est un homéomorphisme.

4. *Topologie de SO(4):* Soit q_1, q_2 deux éléments de $\mathbb{H}^*$. On note $\phi_{q_1,q_2} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ l'application définie par $\phi_{q_1,q_2}(q) = q_1 q q_2^{-1}$. En déduire un morphisme de groupe de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$. Montrer que c'est un revêtement double.