

Correction de la Feuille de TD 1 de Surfaces de Riemann. Exemples élémentaires, morphismes et fonctions méromorphes.

Grégory Ginot

Un *morphisme* $f : X \rightarrow Y$ entre surfaces de Riemann (non nécessairement connexes) désignera une application $f : X \rightarrow Y$ qui est *holomorphe*.

Exercice 1 (La sphère de Riemann). Soit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, la sphère unité¹ de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . On note $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$, les "pôles Nord et Sud" de S^2 . on identifie \mathbb{R}^2 avec le plan $z = 0$. Soit $p_N : S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application, appelée projection stéréographique (de pôle nord), qui associe à un point $m \in S^2 - N$ le point d'intersection de \mathbb{R}^2 avec la demi droite issue de N et passant par m . De même, on note $p_S : S^2 - \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, la projection stéréographique de pôle sud.

1. Montrer que p_N et p_S sont des homéomorphismes. Décrire géométriquement la composée $p_S \circ p_N^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$.
2. En déduire que S^2 peut être muni d'une structure de surface de Riemann.
3. Que devienne un cercle, une droite de \mathbb{R}^2 après application de p_N^{-1} ?
4. Montrer que p_N préserve les angles, mais pas les distances.
5. Montrer que $d(m, n) = \arccos(\langle m, n \rangle)$ définit une distance sur S^2 (muni de sa topologie).
6. Montrer qu'il n'existe aucune application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ (où $U \subset S^2$ est un ouvert) qui préserve les distances.

Solution 1.

Exercice 2 (Espaces Projectifs complexes). On note $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$ l'espace des droites complexes de $\mathbb{C}P^{n+1}$ muni de la topologie quotient.

1. Montrer que $\mathbb{C}P^n$ est une variété complexe de dimension n compacte et connexe.
2. Montrer que $\mathbb{C}P^1$ est isomorphe à S^2 en tant que surface de Riemann. Vérifier également que $\mathbb{C}P^1$ s'identifie à $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec la structure de surface de Riemann donnée dans l'Exemple 1.3 du cours, c'est à dire munie des cartes $z_1 : \widehat{\mathbb{C}} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_1(z) = 1/z$ et $z_2 : \widehat{\mathbb{C}} - \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_2(z) = z$.

Solution 2.

Exercice 3 (Fonctions holomorphes et méromorphes).

1. Montrer que toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann *connexe* et *compacte* est constante.
2. Montrer que toute fonction méromorphe sur une surface de Riemann X peut être vue comme un morphisme (c'est à dire une application holomorphe) $f : X \rightarrow \mathbb{C}P^1$.
3. Montrer que les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}P^1$ sont les fonctions rationnelles.

¹dite de Riemann lorsqu'on la munit de "sa" structure complexe

Solution 3. Rappelons que $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe (resp. méromorphe) si, pour toute carte $X \supset U \xrightarrow{\phi} D \subset \mathbb{C}$, on a $f \circ \phi^{-1}$ est holomorphe (resp. méromorphe).

1. Soit X une surface de Riemann compacte et $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Puisque une fonction holomorphe est continue, elle admet un maximum sur tout compact; on note $m = \max(f(x), x \in X)$. On en déduit que $M := \{x \in X \mid f(x) = m\} = f^{-1}(\{m\})$ est non-vide. Il est fermé comme pré-image du fermé $\{m\}$ par la fonction continue f . Il est aussi *ouvert*: en effet, si $x \in M$, on peut trouver une carte locale $\phi : U \xrightarrow{\sim} D$ (où U est un voisinage de $x \in X$ et D un disque ouvert dans \mathbb{C}). Mais alors la fonction $D \xrightarrow{\phi^{-1}} U \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ est holomorphe² et atteint son maximum par définition de x . Il suit du principe du maximum qu'elle est constante et on a montré que $U \subset M$. Par conséquent U est un voisinage de x dans M et ce dernier est ouvert. Comme X est connexe, M ouvert, fermé et non-vide force $M = X$ et f est constante.
2. Soit D , l'ensemble discret des pôles de f . Puisque f est holomorphe sur $X - D$, la fonction $f : X - D \rightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$ est également holomorphe (autrement dit un morphisme de surface de Riemann). Il reste à regarder ce qui se passe au voisinage des pôles. Bien entendu, pour tout pôle $x \in D$, on définit $f(x) = \infty \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{C}P^1$. Puisque D est discret, on peut trouver une carte $\phi : U \xrightarrow{\sim} D$ où U est un voisinage d'un pôle $x_0 \in X$ qui ne contient aucun autre pôle et D un disque tel que $\phi(x_0) = 0$. La fonction $D - \{0\} \xrightarrow{\phi^{-1}} U - \{x_0\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ est de la forme $z^{-n} P(z)/Q(z)$ avec P, Q holomorphe ne s'annulant pas en 0 et $n > 0$ est l'ordre du pôle. Une carte au voisinage du point $\infty \in \mathbb{C}P^1$ est donnée (cf le cours ou l'exercice 2) par l'application $z \mapsto 1/z$. On doit montrer que l'application composée³ $D - \{0\} \xrightarrow{\phi^{-1}} U - \{x_0\} \xrightarrow{f} \mathbb{C}P^1 - \{\infty\} \xrightarrow{z \mapsto 1/z} \mathbb{C}$ se prolonge en une fonction holomorphe à tout le disque D . Or cette application est l'application $z \mapsto g(z) = z^n Q(z)/P(z)$ qui est holomorphe sur $D - \{0\}$ et bornée. Par le principe de prolongement des fonctions holomorphes, elle admet donc une unique extension holomorphe sur tout le disque (qui vérifie $g(0) = 0$ donc $1/g(0) = \infty$). Il suit que l'application f définit bien un unique morphisme $f : X \rightarrow \mathbb{C}P^1$. Essentiellement, on a étendu de manière évidente la fonction de X sur $\mathbb{C}P^1$ et vérifié que l'application obtenue était holomorphe.

Notons que la réciproque est vraie (en mettant de côté le cas particulier de la fonction constante $x \mapsto \infty$). En effet, par le principe des zéros isolés, $f^{-1}(\{\infty\})$ est discret, et un raisonnement similaire au précédent montre que $f_{X-f^{-1}(\{\infty\})} : X \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe, et qu'au voisinage de tout point de $x \in f^{-1}(\{\infty\})$, f lue dans une carte est méromorphe.

3. On sait déjà que les fonctions rationnelles sont des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}P^1$ (voir le cours ou mieux, le vérifier dans des cartes). Si f est constante, elle est rationnelle (en faisant l'abus de notation $1/0 = \infty$). Si f n'est pas constante, on a un nombre fini de pôles (car $\mathbb{C}P^1$ est compact, et les pôles forment un ensemble discret). Quitte à regarder $1/f$, on peut supposer que ∞ n'est pas un pôle. Si x_i est un pôle, il existe une carte locale dans laquelle la fonction est de la forme $\lambda_i(z - x_i)^{-n_{x_i}} P_i(z)/Q_i(z)$ où P_i, Q_i sont holomorphes et valent 1 en x_i . Alors la fonction $f(z) - \sum_{i=1}^d \lambda_i(z - x_i)^{-n_{x_i}}$ (où $\{x_1, \dots, x_d\}$ sont les pôles de f) est une fonction méromorphe bien définie sur $\mathbb{C}P^1$ (dans des cartes, y compris dans un voisinage de ∞ , elle est une somme de fonctions méromorphes, donc méromorphe), sans pôles par construction, donc holomorphe. Mais $\mathbb{C}P^1$ est compact, donc par la première question, $f(z) - \sum_{i=1}^d \lambda_i(z - x_i)^{-n_{x_i}}$ est constante et il suit que f est rationnelle.

²par définition d'une fonction holomorphe sur une surface de Riemann

³c'est à dire l'application f lue dans les cartes

Exercice 4 (Morphismes entre surfaces de Riemann). Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme non-constant entre surfaces de Riemann *connexes*.

1. Montrer que f est ouverte.
2. Montrer que f est discrète (c'est à dire que, pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ est discret).
3. Si f est injective, montrer que f est un isomorphisme (de surfaces de Riemann) de X sur $f(X)$.
4. On dit que f est ramifié en un point $x \in X$ si il n'existe aucun voisinage V_x de x tel que $f|_{V_x}$ soit injective. Montrer que f est non ramifié si et seulement si f est un homéomorphisme local. Donner des exemples de morphismes ramifiés et non-ramifiés.
5. On suppose que X et Y sont compacts. Montrer que f est surjective. En prenant $X = \mathbb{C}P^1 = Y$, en déduire le théorème fondamental de l'algèbre.
6. Où peut-on supprimer les hypothèses de connexité dans les questions précédentes ?

Solution 4. Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction holomorphe. Rappelons qu'au voisinage de tout point $x \in X$, il existe⁴ des cartes locales $\phi : D_1 \rightarrow U \ni x$, $\psi : D_2 \rightarrow V \ni f(x)$ en x et en $f(x)$, et un entier n , tels que $\psi^{-1} \circ f \circ \phi(z) = z^n$ pour tout $z \in D_1$. l'entier n est indépendant du choix des cartes et s'appelle le degré de f en x (ou l'ordre de ramification en x). il est nul si et seulement si la fonction est (localement) constante.

1. Comme X est connexe, si f est localement constante elle est constante. De plus, au voisinage de tout point x , comme $z \mapsto z^n$ est ouverte (pour $n > 0$), et ϕ, ψ des homéomorphismes, il en est de même pour f (être ouverte est, bien-sûr, une propriété qui se vérifie localement).
2. Remarquons que si $f^{-1}(\{y\})$ contient un point d'accumulation x (c'est à dire n'est pas discret), alors f est constante dans un voisinage de x . En effet, dans des cartes locales en x , $f(x)$, f s'écrit comme une fonction holomorphe $z \mapsto h(z)$ et, puisque x est un point d'accumulation de $f^{-1}(\{y\})$, les zéros de $h(z) - f(x)$ contiennent un point d'accumulation. Le principe des zéros isolés force alors h à être constante et donc f aussi (localement).

Soit $y \in Y$. On définit maintenant l'ensemble

$$U = \{z \in X \text{ il existe un voisinage } V_z \ni z \text{ tel que } f|_{V_z} = y\}.$$

Par construction U est ouvert. On vient de démontrer que U est fermé (puisque si $z_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} z$ avec $z_i \in U$, alors par continuité de f on a $f(z_i) = y$ et z est un point d'accumulation de $f^{-1}(\{y\})$). Comme X est connexe, U est soit vide soit X . Ce dernier cas est exclu puisque f n'est pas constante.

On a obtenu que pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ est discret.

3. Si f est injective, alors elle est a fortiori injective localement et donc en tout point x , le degré de x est 1. Il suit que la différentielle de f est non-nulle en tout point et que l'on peut appliquer le théorème d'inversion locale qui assure que f est localement un isomorphisme. Comme c'est de plus une bijection de X sur $f(X)$ (par injectivité globale), f est un isomorphisme de X sur $f(X)$ (il suffit de vérifier les conditions de biholomorphie localement).
4. Si f est un homéomorphisme local, elle est localement injective et donc non-ramifiée. Réciproquement, si f est non-ramifiée, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V_x sur lequel f est injective. Par la question précédente, f est donc un isomorphisme de V_x sur son image; en particulier un homéomorphisme local. On vérifie sans mal que $z \mapsto \exp(z)$ est non-ramifiée sur \mathbb{C} alors que $z \mapsto z^n$ est ramifiée en 0 (et seulement en 0).

⁴c'est essentiellement une conséquence du théorème d'inversion locale en holomorphe

5. Comme X est compact, $f(X)$ est compact dans Y (qui est séparé), donc fermé. De plus, si f est non-constante, $f(X)$ est aussi ouvert par la question 1. Il suit (on suppose X non-vide) que $f(X) = Y$ par connexité de Y . Par conséquent f est surjective.

Remarque : dans la démonstration précédente on a seulement utilisé que X est compact (pas forcément connexe) et que Y est connexe. Comme la conclusion est que f est surjective, ceci force Y à être compact. En particulier, on a obtenu que toute application holomorphe d'une surface de Riemann compacte X dans une surface de Riemann non-compacte Y est constante !

De même, toute application injective entre surfaces de Riemann compactes est un isomorphisme (d'après la question 3 et e qu'on vient de prouver).

Un polynôme f est une fonction rationnelle, donc il s'étend en une fonction holomorphe $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$, non-constante si le polynôme n'est pas constant. Elle est donc surjective puisque $\mathbb{C}P^1$ est compact. En particulier, il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = 0$ ($x \in \mathbb{C}$ car $f(\infty) = \infty$ puisque f est non-constant).

6. On a vu que l'on n'avait pas besoin de la connexité pour X dans la question 5. Ce n'est pas nécessaire non-plus dans la question 3 (il suffit de raisonner sur chaque composante connexe), ni dans la question 4. En revanche, si par exemple on ne prend pas X connexe le résultat de la question 1 est faux. En effet l'application $f : \mathbb{C} \coprod D \rightarrow \mathbb{C}$ définie par l'identité sur \mathbb{C} et l'application constante $z \mapsto 0$ sur le disque D n'est pas ouverte mais pas constante non-plus. Elle n'est pas non plus discrète (la préimage de 0). Enfin si Y n'est pas connexe, le résultat de la question 5 est faux (il suffit de regarder l'inclusion de $\mathbb{C}P^1$ dans $\mathbb{C}P^1 \coprod \mathbb{C}$).

Exercice 5 (Constructions de surfaces de Riemann à partir d'une autre). Soit X une surface de Riemann.

1. Si Γ est un groupe (discret) qui agit analytiquement sur X , librement et proprement. Montrer que le quotient X/Γ a une structure naturelle de surface de Riemann telle que la projection $X \rightarrow X/\Gamma$ soit un morphisme.
2. Soit \tilde{X} un espace topologique séparé (et dénombrable à l'infini) et $f : \tilde{X} \rightarrow X$ un homéomorphisme local. Montrer qu'il existe une *unique*⁵ structure de surface de Riemann sur \tilde{X} qui fasse de f un *morphisme*.

Solution 5. 1. Voir le polycopié du cours pour une preuve.

2. Il suffit d'utiliser les homéomorphismes locaux pour construire des cartes locales⁶ en transportant celles de X sur \tilde{X} . Plus précisément, pour tout $x \in \tilde{X}$, soit V_x un voisinage de x sur lequel p est un homéomorphisme. Alors, comme X est une surface, $p(V_x)$ contient un voisinage $U_{p(x)}$ de $p(x)$ et une application $\phi_x : U_{p(x)} \rightarrow D$ un disque ouvert (c'est à dire une carte locale en $p(x)$). Alors l'application composée $\phi_x \circ p : p^{-1}(U_{p(x)}) \rightarrow D$ est un homéomorphisme. Pour vérifier que ces cartes donnent une structure de surface de Riemann, il faut vérifier que sur les composées $(\phi_x \circ p) \circ (\phi_y \circ p)^{-1}$ sont holomorphes. Or ces composées sont $\phi_x \circ \phi_y^{-1}$ qui sont holomorphes puisque X est de Riemann.

Pour voir que p est holomorphe, il suffit de le vérifier dans des cartes locales. Or dans une carte locale au voisinage de x , on a que p se réécrit sous la forme $\phi_x \circ p \circ (\phi_x \circ p)^{-1} = \text{id}$ qui est trivialement holomorphe.

Finalement, si on munit X d'un autre atlas holomorphe, il suffit de vérifier que l'identité $\text{id} : X \rightarrow X$ est un isomorphisme. Elle est évidemment bijective, donc il faut voir qu'elle est biholomorphe.

⁵à isomorphisme de surfaces de Riemann près

⁶on sait déjà que \tilde{X} est séparé et dénombrable à l'infini, donc il suffit d'exhiber un atlas holomorphe

Encore une fois on le vérifie dans des cartes. Mais dans des cartes locales, quitte à restreindre la carte, on peut aussi supposer que p est un homéomorphisme local. Il en découle que $\text{id} = p^{-1} \circ p$ est la composée d'applications holomorphes sur cette carte est donc est un biholmorphisme local. Par injectivité et surjectivité, l'identité est un isomorphisme.

Remarque : en particulier, on obtient que tout revêtement d'une surface de Riemann a une unique (à isomorphisme près) structure de surfaces de Riemann; c'est en particulier vrai pour le revêtement universel !

Exercice 6 (Automorphismes de D , H , $\mathbb{C}P^1$). On note $D = B(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ le disque unité et $H = \{z \in \mathbb{C} / \text{im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré.

1. Montrer que D et H sont des surfaces de Riemann. Sont-elles compactes ?
2. Montrer que D est homéomorphe à \mathbb{C} mais n'est pas isomorphe à \mathbb{C} (en tant que surface de Riemann). Montrer que D est isomorphe à H via une homographie que l'on explicitera.
3. Identifier le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C})$ des automorphismes de \mathbb{C} . Agit-il transitivement sur \mathbb{C} ?
4. Montrer que le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ des isomorphismes de $\mathbb{C}P^1$ est le groupe des homographies⁷ et qu'il agit transitivement sur $\mathbb{C}P^1$.
5. Identifier les groupe $\text{Aut}(D)$ des automorphismes de D et $\text{Aut}(H)$ des automorphismes de H .

Solution 6. Rappelons que les homographies forment le groupe $PGL_2(\mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$. Il agit transitivement sur $\mathbb{C}P^1$ car $GL(2, \mathbb{C})$ agit transitivement sur $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ (et que l'action passe au quotient par construction). Si on identifie $\mathbb{C}P^1$ et $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ via l'isomorphisme $[x, y] \mapsto x/y$, on obtient la formule suivante pour une homographie dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ où $ad - bc \neq 0$ correspondant à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $GL(2, \mathbb{C})$. En particulier, une homographie est une fonction rationnelle inversible, donc un automorphisme de la surface de Riemann $\mathbb{C}P^1$. Enfin on peut remarquer les homographies sont engendrées par les similitudes directes et de l'application $z \mapsto 1/z$ qui est la composée de l'inversion $z \mapsto \bar{z}$ et de la symétrie $z \mapsto .$ Il suit que toute homographie transforme les cercles et droites⁸ de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en cercles ou droites; bien sur on peut aussi vérifier cela élémentairement, en considérant par exemple les équations des cercles/droites.

Les homographies contiennent en particulier comme sous-groupe les homographies réelles $PGL_2(\mathbb{R}) = GL_2(\mathbb{R})/\mathbb{R}^*$. ainsi que le sous-groupe $PSL_2(\mathbb{R}) =$ On peut remarquer que le déterminant d'une homographie n'est pas bien déterminé puisque $\det(\lambda h) = \lambda^2 h$. En revanche, si h est une homographie réelle alors le signe du déterminant est bien défini; donc le déterminant induit un morphisme de groupe $\det : PGL_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le noyau de ce morphisme de groupe est $PGL_2^+(\mathbb{R}) = PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm \text{id}\}$, le sous-groupe des homographies réelles de déterminant positif.

1. D et H sont des ouverts de \mathbb{C} , donc sont des surfaces de Riemann, non-compactes.
2. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow D$ est un morphisme quelconque, alors la composée $\mathbb{C} \xrightarrow{f} D \hookrightarrow \mathbb{C}$ est une application holomorphe bornée définie sur \mathbb{C} . Elle est constante d'après le Théorème de Liouville. En particulier, f ne peut pas être un isomorphisme !

Rappelons que les homographies envoient les cercles/droites sur des cercles/droites et sont des isomorphismes $\mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$. L'espace $\mathbb{C} - \mathbb{R} = \mathbb{C}P^1 - (\mathbb{R} \cup \infty)$ a deux composantes connexes H

⁷dit aussi groupe de Möbius

⁸on prolonge toute droite en lui rajoyant le point à l'infini. On sait alors que les cercles/droites sont les cercles de S^2 via la projection stéréographique, voir l'exercice 1

et $-H$, et donc, toute homographie h envoie biholomorphiquement H sur une des composantes connexes de $\mathbb{C}P^1 - h(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$. Puisque $h(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ est une droite ou un cercle, il est déterminé par l'image de trois points. On en déduit que l'homographie $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ envoie $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ sur le cercle unité de \mathbb{C} (car $h(0) = -1$, $h(1) = -i$ et $h(\infty) = 1$). De plus $h(i) = 0$ implique alors que $h(H) = D$! Notons que la réciproque de h est l'homographie $z \mapsto i \frac{z+1}{1-z}$.

3. Il est évident que les similitudes $z \mapsto az + b$ ($a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$) sont des automorphismes de \mathbb{C} et agissent transitivement. On va maintenant montrer que ce sont les seuls.

Supposons que f est un automorphisme de \mathbb{C} . On commence par montrer que f est un polynôme. En effet, montrons que, sinon, f ne peut pas être injective. Si f n'est pas un polynôme, alors $g(z) = f(1/z)$ admet une singularité essentielle en 0 (autrement dit est holomorphe sur \mathbb{C}^* mais pas méromorphe en 0). Par un théorème du cours, $g(\{z, |z| > 1\})$ est dense dans \mathbb{C} (sinon il existerait un disque $D(z_0, r)$ de rayon r centré en z_0 tel que $(g(z) - z_0)^{-1} \leq 1/r$ et la fonction $(g(z) - z_0)^{-1}$ serait prolongeable en une fonction holomorphe sur tout \mathbb{C} et donc g serait méromorphe). Mais alors, il suit que g ne peut pas être injective, puisque $g(\{z, |z| > 1\}) \cap (\{z, |z| < 1\}) \neq \emptyset$ (rappelons que g est ouverte car holomorphe non-constante et donc $g(\{z, |z| > 1\})$, $(\{z, |z| < 1\})$ aussi).

On a donc obtenu que f est un polynôme. Il est de plus injectif, donc de degré 1 et le résultat suit.

4. On sait déjà que le groupe des automorphismes de $\mathbb{C}P^1$ contient les homographies, et qu'elles agissent transitivement. Donc si f est un automorphisme de $\mathbb{C}P^1$, quitte à le composer par une homographie, on peut supposer que f laisse le point ∞ fixe. Pour déterminer les automorphismes de $\mathbb{C}P^1$, il suffit maintenant de déterminer le groupe $Fix(\infty)$ des automorphismes de $\mathbb{C}P^1$ qui laissent ∞ fixe. En effet, $Aut(\mathbb{C}P^1)$ sera alors le groupe engendré par $Fix(\infty)$ et les homographies. Ceci est une méthode générale pour déterminer des sous-groupes d'automorphisme dès qu'on connaît un sous-groupe transitif.

Or si f est automorphisme qui laisse fixe le point ∞ , par injectivité, sa restriction $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est un isomorphisme, donc une similitude directe. Comme ces dernoères sont des homographies, il suit que $Aut(\mathbb{C}P^1) = PGL_2(\mathbb{C})$.

5. Déjà, il est clair que la droite réelle est envoyée sur elle-même par tout élément de $PSL_2(\mathbb{R})$ (puisque les coefficients sont réels). Par connexité, H est alors envoyé sur lui-même ou sur $-H$. Si $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL_2(\mathbb{R})$, alors la partie imaginaire $Im(f(i)) = (ad - bc)/|ci + d| > 0$, donc f envoie H sur H . En particulier, $PSL_2(\mathbb{R}) \subset Aut(H)$. Un argument similaire montre en fait que les homographies qui préservent H sont précisément celles de $PSL_2(\mathbb{R})$. On va montrer que $Aut(H) = PSL_2(\mathbb{R}) = PGL_2^+(\mathbb{R})$.

On remarque que $PSL_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur H . En effet comme les éléments de $PSL_2(\mathbb{R})$ sont inversibles, il suffit de montrer que l'on peut envoyer tout $z \in H$ sur i par une homographie de $PSL_2(\mathbb{R})$. Or, par une translation de vecteur réel on peut envoyer z sur l'axe des imaginaires purs. En composant par une homothétie de rapport positif, on peut alors envoyer z sur i par un élément de $PSL_2(\mathbb{R})$.

Quitte à composer par un élément de $PSL_2(\mathbb{R})$, on peut supposer qu'un automorphisme $f \in Aut(H)$ laisse le point i fixe. Pour déterminer les automorphismes de $\mathbb{C}P^1$, il suffit alors de déterminer le groupe $Fix(i)$ des automorphismes de $\mathbb{C}P^1$ qui laissent i fixe (le raisonnement est le même que pour $Aut(\mathbb{C}P^1)$).

On est donc réduit à montrer que $Fix(i)$ est un sous-groupe des homographies. On a vu que l'homographie $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$ est un isomorphisme entre H et D qui envoie i sur 0. Donc $Fix(i) =$

$h^{-1} \circ \text{Fix}(0) \circ h$ et il est équivalent de déterminer les automorphismes de D qui fixent 0. Ceci est facile en appliquant le lemme de Schwarz. En effet un isomorphisme de D est une application holomorphe définie sur le disque qui vérifie $|f(z)| < 1$. Si elle fixe 0, on sait alors que $|f(z)| \leq |z|$. Mais f^{-1} doit vérifier la même propriété. Ceci force $|f(z)| = |z|$ et le lemme de Schwarz assure alors que $f(z) = \exp(i\theta)z$ (c'est à dire est une rotation d'angle θ). En particulier, $\text{Fix}(0)$ est une homographie, donc $\text{Fix}(i)$ aussi et $\text{Aut}(H) = \text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Remarque : un calcul direct montre que $\text{Fix}(i) = h^{-1} \circ \text{Fix}(0) \circ h$ est le sous-groupe des homographies de la forme $z \mapsto \frac{Z + \tan(\theta/2)}{1 - z \tan \theta/2}$.

Il reste à déterminer les automorphismes de D . Puisque $h : H \xrightarrow{\cong} D$ est un isomorphisme, $\text{Aut}(D) = h \circ \text{Aut}(H) \circ h^{-1}$. On peut écrire le résultat explicitement, bien sûr. Si $f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, alors on a

$$f \circ h^{-1}(z) = \frac{ai(z+1) + b(1-z)}{ci(z+1) + d(1-z)} = \frac{(ai-b)z + ai+b}{(ci-d)z + ci+d}$$

Il suit que

$$h \circ f \circ h^{-1}(z) = \frac{z((a+d)i + c - b) + (a-d)i + b + c}{z((a-d)i - c - b) + (a+d)i + b - c} = -\frac{c-b+i(a+d)}{c-b-i(a+d)} \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}$$

où $z_0 = \frac{b+c+i(a-d)}{c-b+i(a+d)}$. On remarque que $|z_0| < 1$ et que $\left| \frac{c-b+i(a+d)}{c-b-i(a+d)} \right| = 1$. Il suit qu'un automorphisme de D est de la forme $z \mapsto \exp(i\theta) \frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0z}$ où $|z_0| < 1$ (réciproquement on vérifie que de tels automorphismes préservent D).

Remarque: puisque les automorphismes de H et de D sont des homographies, ils s'étendent en particulier en des automorphismes de tout $\mathbb{C}P^1$ (ce qui n'était pas évident a priori).

Exercice 7. Soit K un compact inclus dans \mathbb{C} et f une fonction méromorphe sur un voisinage de K .

1. Si f n'a ni pôle ni zéro sur ∂K , alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} = Z(f) - P(f)$$

où $Z(f)$ est le nombre de zéros et $P(f)$ le nombre de pôles de f comptés avec multiplicités.

2. Soit X une surface de Riemann et g une fonction holomorphe sur X . Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un complexe et $x_0 \in X$ une racine d'ordre k de l'équation $g(x_0) = z_0$. Dédire de **1**) qu'il existe un voisinage V_x de x dans X et un voisinage V_z de z , tels que l'équation $g(x) = z$ a exactement k solutions simples dans V_x pour $z \in V_z$.
3. On suppose que f est définie sur \mathbb{C} et a pour période un réseau $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ (autrement dit, f est méromorphe sur la courbe elliptique $T_{(e_1, e_2)}$). On note P le domaine fondamental de Γ . Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial P} \frac{zf'(z)}{f(z) - a} = \sum a_i - \sum b_j$$

où a_i sont les solutions de $f(z) = a$ dans P et les b_j sont les pôles de f dans P (comptés avec multiplicité).