Corrigé de la Feuille de TD 2 de Surfaces de Riemann. Tores comme surfaces de Riemann: courbes elliptiques

Grégory Ginot

Exercice 1 (Surface de Riemann du logarithme)**.** Soit D un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}^*$.

1. Rappeler pourquoi l'intégrale $\displaystyle\int_1^v \frac{d\,t}{t}$ définit une fonction holomorphe sur D mais pas sur $\mathbb{C}^*$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^v \frac{d\,t}{t}$ induit un morphisme de surfaces de Riemann noté $\widetilde{\log}:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ (où $2i\pi\mathbb{Z}\subset\mathbb{C}^2$ est un réseau de dimension 1).

3. Montrer que la fonction exponentielle induit un isomorphisme $\exp:\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^*$ qui est l'inverse de $\widetilde{\log}$.

Solution 1. Par chemin entre deux points A,B d'un ouvert U, on entend une application de classe C^0, C^1 par morceaux, $\gamma:[a,b]\to U$ (ou $\mathbb{C}^*$ ...) tel que $\gamma(a)=A$ et $\gamma(b)=B$.

1. La fonction $z\mapsto 1/z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$; donc elle admet une primitive sur tout domaine simplement connexe de $\mathbb{C}^*$, en particulier sur D. Fixons un point $v_0\in D$ et γ_0 un chemin de 1 à v_0 dans $\mathbb{C}^*$. On définit alors l'intégrale $\displaystyle\int_1^v \frac{dt}{t}$ comme l'intégrale $\displaystyle\int_{\gamma_0}\frac{dt}{t}+\int_\gamma\frac{dt}{t}$ où γ est un chemin dans D de v_0 à v. Comme D est simplement connexe et dt/t est holomorphe, $\displaystyle\int_\gamma\frac{dt}{t}$ est indépendante du choix du chemin γ et coincide avec $F(v)-F(v_0)$ pour F une primitive holomorphe de $z\mapsto 1/z$ sur D. En particulier, $v\mapsto\displaystyle\int_1^v\frac{dt}{t}$ est bien définie et holomorphe sur D.

   En revanche, cette fonction n'est pas définie sur $\mathbb{C}$ tout entier (elle est multivaluée). En effet, sinon $0=\displaystyle\int_1^1\frac{dt}{t}$ serait aussi la limite, pour $\epsilon\to 0$, de $\displaystyle\int_{C_\epsilon}\frac{dt}{t}$ où $C_\epsilon=\{\exp(i\theta),\,\theta\in[0,2\pi(1-\epsilon)]\}$. Or
$$\int_{C_\epsilon}\frac{dt}{t}=\int_0^1\frac{d(\exp(2\pi(1-\epsilon)t))}{\exp(2\pi(1-\epsilon)t)}=2\pi(1-\epsilon)\underset{\epsilon\to0}{\longrightarrow}2\pi\neq 0.$$

2. Soit γ,γ' deux chemins de 1 à v dans $\mathbb{C}^*$. Alors $\displaystyle\int_\gamma\frac{dt}{t}-\int_{\gamma'}\frac{dt}{t}=\int_{(\gamma')^{-1}\circ\gamma}\frac{dt}{t}$ où $(\gamma')^{-1}\circ\gamma$ est le lacet de 1 à 1 obtenu en parcourant γ puis en parcourant γ' en sens inverse (faire un dessin...). Alors $\displaystyle\int_{(\gamma')^{-1}\circ\gamma}\frac{dt}{t}$ est égale à $2i\pi\mathrm{ind}_{(\gamma')^{-1}\circ\gamma}(0)$, où $\mathrm{ind}_{(\gamma')^{-1}\circ\gamma}(0)$ est l'indice du lacet autour de 0, qui est un entier d'après le cours. Il suit que $\displaystyle\int_\gamma\frac{dt}{t}-\int_{\gamma'}\frac{dt}{t}\in 2i\pi\mathbb{Z}$. Donc, en composant l'intégrale avec l'application canonique $\mathbb{C}\to\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ de passage au quotient, on obtient une application composée $\mathbb{C}^*\ni v\mapsto\displaystyle\int_1^v\frac{dt}{t}\mapsto\left[\int_1^v\frac{dt}{t}\right]\in 2i\pi\mathbb{Z}$ qui est bien définie. On la note $\widetilde{\log}:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$.

   Montrons que $\widetilde{\log}$ est holomorphe (en particulier, continue). Il suffit de vérifier cela dans des cartes locales. Soit alors $v_0\in\mathbb{C}^*$ et $D\subset\mathbb{C}^*$ un voisinage simplement connexe de v_0. Dans ce voisinage, l'intégrale $\displaystyle\int_1^v\frac{dt}{t}$ définit une fonction holomorphe, notée F, d'après la question 1) (il y a plusieurs choix possibles, en fonction du chemin de 1 à v_0 choisi, mais ils diffèrent tous d'un multiple entier de $2i\pi$, et donc coincident après passage au quotient). De plus, par construction, $\widetilde{\log}=p\circ F$ où $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ est l'application de projection, qui est un morphisme de surface de Riemann (voir le cours ou la feuille de TD 1), c'est à dire holomorphe. Donc cette composée est une fonction holomorphe bien définie !

3. La fonction exponentielle est une application holomorphe $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ qui est invariante par l'action du groupe $2i\pi\mathbb{Z}$ (car $\exp(z + 2in\pi) = \exp(z)$), donc, elle définit une application continue $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ encore notée exp. Montrons que cette application est holomorphe. Pour cela, on considère une carte locale de $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$. D'après le cours (ou le feuille de TD 1), une telle carte est donnée par la restriction à un ouvert U de $\mathbb{C}$, sur lequel la projection p est un homéomorphisme local (par exemple n'importe quel disque de rayon $< 1/2$). Mais alors, l'application $U \xrightarrow{p} p(U) \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}^*$ est la restriction de l'exponetielle usuelel à U donc est holomorphe. Par suite $\exp : \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ l'est aussi.

   Remarque : il s'agit là évidemment, d'un phénomène tout à fait général vrai pour tout revêtement d'une surface de Riemann !

   Montrons maintenant que exp est l'inverse de $\widetilde{log}$. On va dériver l'application holomorphe $v \mapsto \dfrac{\exp(\widetilde{\log}(v))}{v}$. Il suffit de faire cela dans un voisinage simplement connexe de v, donc de dériver $v \mapsto \dfrac{\exp(\int_1^v \frac{dt}{t})}{v}$. On trouve alors facilement que cette dérivée est nulle, donc $v \mapsto \dfrac{\exp(\widetilde{\log}(v))}{v}$ est constante et vaut 1 en 1. Par ailleurs, $\displaystyle\int_{\exp(0)}^{\exp(z)} \frac{d(\exp(t))}{\exp(t)} = \int_0^z 1dt = z$. Il suit que exp est l'inverse de $\widetilde{\log}$. Ces deux fonctions étant holomorphe, on a bien obtenu un *isomorphisme* $\mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^*$.

   Remarque : on peut aussi montrer directement que $\widetilde{\log}$ est un isomorphisme *local*, en considérant sa dérivée qui ne s'annule jamais et en appliquant le théorème d'inversion holomorphe locale.

Exercice 2 (Structures complexes sur un tore: courbes elliptiques)**.** Soit $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ un réseau de $\mathbb{C}$ (c'est à dire que $e_1/e_2 \notin \mathbb{R}$). On considère le Tore $T_{(e_1,e_2)} := \mathbb{C}/\Gamma$.

1. Montrer que $T_{(e_1,e_2)}$ a une structure de surface de Riemann telle que $p : \mathbb{C} \to T_{(e_1,e_2)}$ un morphisme; exhiber un atlas de $T_{(e_1,e_2)}$.
2. Montrer que $T_{(e_1,e_2)}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ ou D et qu'il existe $\tau \in H$ tel que $T_{(e_1,e_2)}$ est isomorphe à $T_{(1,\tau)}$.
3. Montrer que $_{(1,\tau)}$ est *homéomorphe* à $T_{(1,\nu)}$ et qu'ils sont *isomorphes* si et seulement si $\nu = \dfrac{a\tau + b}{c\tau + d}$ avec $ad - bc = 1$ et $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que les fonctions méromorphes sur $T_{(e_1,e_2)}$ sont les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ de période e_1 et e_2.

Solution 2. Rappelons que $T_{(e_1,e_2)}$ est compact (en particulier séparé), homéomorphe à unproduit $S^1 \times S^1$ de cercles.

1. Le tore $T_{(e_1,e_2)} := \mathbb{C}/\Gamma$ est un quotient du groupe $(\mathbb{C}, +)$ par le sous-groupe discret Γ, qui agit donc librement et proprement sur $\mathbb{C}$. Il est donc muni d'une unique structure de surface de Riemann qui rende la projection $p : \mathbb{C} \to T_{(e_1,e_2)}$ holomorphe (cf le cours ou la feuille de TD 1).

   On peut aussi donner un atlas holomorphe directement. Soit $[z] \in T_{(e_1,e_2)}$ ($z \in \mathbb{C}$). Soit D un disque[1] inclus dans un domaine fondamental du réseau (faire un dessin). Alors la restriction de la projection $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma = T_{(e_1,e_2)}$ au disque $z + D$ est un homéomorphisme (car il n'existe pas deux points du disque qui diffèrent par un élément du réseau). Ceci fournit des cartes locales $D \cong z + D \to p(z + D)$ au voisinage de tout point du tore. Il reste à montrer que les changements de carte sont holomorphes. Mais ces changements de cartes sont de la forme $x \mapsto z + x \mapsto x + (z - z')$, donc sont donnés par des translations qui sont bien holomorphes.

2. Un tore est compact, et ne peut donc pas être isomorphe à des ouverts de $\mathbb{C}$. Supposons que (e_1, e_2) soit uen base directe; alors $e_2/e_1 \in H$. Alors, on définit une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ donnée par $z \mapsto \dfrac{z}{e_1}$ qui est biholomorphe. Il est clair que $f(\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2) = \mathbb{Z} \oplus \dfrac{e_2}{e_1}\mathbb{Z}$. On en déduit que f induit un isomorphisme $T_{(e_1,e_2)} \cong T_{(1,\tau)}$ après passage au quotient (en notant $\tau = e_2/e_1$). Si la base (e_1, e_2) est indirecte, alors on considère la base $(-e_1, e_2)$ qui est directe et on applique le raisonnement précédent.

[1] bien sûr, on peut aussi prendre l'intérieur du parallélogramme formé par les vecteurs e_1, e_2

3. Deux tores sont toujours homéomorphes à $S^1 \times S^1$ (via l'application $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \ni xe_1 + ye_2 \mapsto (\exp(2i\pi\, x), \exp(2i\pi\, y))$) et donc entre eux. En revanche il existe une infinité de classes d'isomorphismes. En effet, supposons que $f : T_{(1,\tau)} \to T_{(1,\nu)}$ soit un isomorphisme. On en déduit une application holomorphe $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}) = T_{(1,\tau)} \xrightarrow{f} T_{(1,\nu)}$. Remarquons que pour tout $b \in \mathbb{C}$, on a un isomorphisme entre $[z] \mapsto [z+b]$ de $T_{(1,\nu)}$. On peut donc se ramener au cas où $f([0]) = [0]$. Comme $\mathbb{C}$ est simplement connexe, il existe un relèvement[2] de cette application $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tel que $\tilde{f}(0) = 0$. De même, f^{-1} admet un unique relèvement $\widetilde{f^{-1}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tel que $\widetilde{f^{-1}}(0) = 0$. Par unicité des relèvements, on obtient que $\widetilde{f^{-1}} = \tilde{f}^{-1}$, et donc $\tilde{f}$ est un homéomorphisme. C'est en fait un isomorphisme. En effet, $\tilde{f}$ est holomorphe: on peut considérer un voisinage V de $\tilde{f}(z)$ sur lequel la projection $p_\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \nu\mathbb{Z})$. Alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$ et on peut se restreindre à un voisinage U de z tel que $\tilde{f}(U) \subset V$ et sur lequel la projection $_\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$ restreinte à U est un homéomorphisme local. Alors, restreinte à U, l'application $\tilde{f} = p_{\nu|f(p_\tau(U))}^{-1} \circ f \circ p_\tau$ est holomorphe car composée d'applications (bi-)holomorphes. Il en est de même pour son inverse.

   On est donc ramené au cas d'un isomorphisme de $\mathbb{C}$. Ces derniers sont donnés par les applications de la forme $z \mapsto z_0 z + z_0'$ ($z_0 \neq 0$) d'après la feuille de TD 1 (et le cours). Ici, $z_0' = 0$ puisque $\tilde{f}(0) = 0$.

   Comme f est un isomorphisme, et que $\tilde{f}$ induit f par passage au quotient, on en déduit que $\tilde{f}(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \nu\mathbb{Z}$. En particulier $\tilde{f}(1,\tau) = (z_0\tau, z_0\tau)$ doit être une base indirecte de $\mathbb{Z} \oplus \nu\mathbb{Z}$. Il suit qu'il existe[3] une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $M(z_0\tau, z_0) = (\nu, 1)$.ce qui donne $az_0\tau + bz_0 = \nu$ et $z_0(c\tau + d) = 1$.

   La réciproque est facile, z_0 étant déterminé par la formule $z_0 = \dfrac{1}{c\tau + d}$.

4. Toute fonction méromorphe $T_{(e_1,e_2)} \to \mathbb{C}$ est un morphisme $T_{(e_1,e_2)} \to \mathbb{C}P^1$ et, par composition, donne lieu à un morphisme $\mathbb{C} \to \mathbb{C}P^1$, c'est à dire une application méromorphe. Pour qu'une telle application f induise une application sur le quotient il faut et il suffit qu'elle soit invariante par l'action du réseau. De plus, en ce cas, l'application quotient sera automatiquement méromorphe, car dans des cartes locales U_Z (sur lesquelles la projection $\mathbb{C} \to T_{(e_1,e_2)}$ est un homéomorphisme), elle s'identifie à l'application $f_{|U_z} : U_z \to \mathbb{C}$.

Exercice 3 (Courbes elliptiques via leurs équations)**.** Soit $X_{g_2,g_3} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,/\, y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3\}$ l'ensemble des zéros de la courbe algébrique $y^2 - 4x^3 + g_2 x + g_3$.

1. On suppose que le pôlynome $4x^3 - g_2 x - g_3$ a ses racines simples.
   i) Montrer que X_{g_2,g_3} est une surface de Riemann qui se plonge naturellement dans $\mathbb{C}P^2$ (on identifiera $\mathbb{C}^2$ avec le complémentaire de l'hyperplan à l'infini $z = 0$).
   ii) On notera C_{g_2,g_3} les solutions de $y^2 - 4x^3 + g_2 x + g_3$ dans $\mathbb{C}P^2$ et on montrera que C_{g_2,g_3} est une surface de Riemann compacte.
   iii) Montrer que l'application $X_{g_2,g_3} \to \mathbb{C}$ défini par $(x,y) \mapsto x$ se prolonge en un morphisme $C_{g_2,g_3} \to \mathbb{C}P^1$ de surfaces de Riemann.

2. Soit $\Gamma_\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ un réseau (avec $\mathrm{im}(\tau) > 0$) et $\mathcal{P}$ sa fonction de Weierstrass. On suppose que $g_2 = g_2(\tau)$ et $g_3 = g_3(\tau)$. On note E_τ le quotient $\mathbb{C}^2/\Gamma_\tau$.
   i) Vérifier que X_{g_2,g_3}, C_{g_2,g_3} sont des surfaces de Riemann et montrer que l'application $j : E_\tau - [\Gamma_\tau] \to \mathbb{C}P^2$ définie par $z \mapsto (\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z), 1)$ induit un isomorphisme de $E_\tau - [\Gamma_\tau]$ sur X_{g_2,g_3} et montrer qu'il s'étend en un isomorphisme $\tilde{j} : E_\tau \xrightarrow{\sim} C_{g_2,g_3}$.
   ii) Montrer que la forme différentielle $\dfrac{d\,x}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}}$ définie sur $\mathbb{C} - \{a_1, a_2, a_3\}$ (où a_1, a_2, a_3 sont les racines de $4x^3 - g_2 x - g_3$) se prolonge en une forme différentielle $f(x)\,d\,x$ sur C_{g_2,g_3}.
   iii) Montrer que l'on peut définir localement (dans $\mathbb{C} - \{a_1, a_2, a_3\}$) une fonction de la forme $z(u) = \displaystyle\int_u^\infty f(x) d\,x$ (où l'intégrale se fait le long d'un chemin non borné évitant a_1, a_2, a_3) mais que f n'admet pas de primitive globale.

[2] c'est à dire application continue $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $[\tilde{f}(z)] = f([z])$ pour tout $z \in \mathbb{C}$

[3] deux bases d'un réseau différent par application d'une matrice inversible à coefficietns entiers, et dont l'inverse est à coefficients entiers. C'est à dire une matrice entière de déterminant ± 1.

iv) Calculer $\dfrac{dz}{du}$ et $\dfrac{du}{dz}$ et en déduire que z définit une fonction holomorphe $\mathbb{C} \to E_\tau$ qui est une coordonnée locale.

v) Trouver un chemin γ_τ dans $\mathbb{C}$ tel que $\displaystyle\int_{\gamma_\tau} f(x)d\,x = -\tau/2$.

Solution 3. 1. Soit $P(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$, polynôme dont les racines (notées a_1, a_2, a_3)) sont simples par hypothèse.

i) D'après le cours, il suffit de vérifier que l'équation algébrique $y^3 - P(x) = 0$ est non-singulière pour vérifier que c'est une surface de Riemann. Elle sera de plus *connexe* car $y^3 - P(x)$ est irréductible[4] dans $\mathcal{M}(x)[y]$ (où $\mathcal{M}(x)$ désigne le corps des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$). Soit $F(x, y) = y^3 - P(x)$. Alors

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -P'(x), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y.$$

Les points singuliers sont donc obtenus pour $y = 0$ et $P'(x) = 0$. Mais si $y = 0$, alors x est une racine de P (donc $x \in \{a_1, a_2, a_3\}$) et $P'(x) \neq 0$ par hypothèse. Par conséquent, aucun point de X_{g_2,g_3} n'est singulier et donc X_{g_2,g_3} est une surface de Riemann connexe.

Bien que ce ne soit pas demandé, détaillons maintenant comment le fait que les points soient non-singuliers implique que X_{g_2,g_3} est une surface de Riemann et permet d'avoir des cartes locales (qui seront utiles dans la question iii)). Déjà, $X_{g_2,g_3} \subset \mathbb{C}^2$ est séparé et dénombrable à l'infini. il reste donc à trouver des cartes locales. Soient $(x_0, y_0) \in X_{g_2,g_3}$ un point tel que $y_0 \neq 0$. Alors, $P(x_0) \neq 0$ et il existe une *unique* détermination holomorphe de la racine cubique $z \mapsto \sqrt{z}$, vérifiant $y_0 = \sqrt{P(x_0)}$, dans un voisinage simplement connexe (mettons un petit disque $D(x_0)$) de x_0 sur un voisinage de $P(x_0)$.

De plus, pour tout point $x \in D(x_0)$, il existe 2 racines carées *distinctes* de $P(x)$ données par $\sqrt{P(x)}, -\sqrt{P(x)}$. Ceci assure que, au voisinage de (x_0, y_0), on dispose d'une carte $x \mapsto (x, \sqrt{P(x)})$ (qui est un homéomorphisme de $D(x_0)$ sur son image vu ci-dessus). On peut noter que ici, la formule explicite pour la racine carrée importe peu. Ce qui compte (du moins tant qu'on ne regarde pas si les cartes forment un atlas holomorphe), c'est qu'elle est définie uniquement et par une fonction continue. Si $y_0 = 0$, alors $x_0 \in \{a_1, a_2, a_3\}$ et il n'existe pas de détermination holomorphe de la racine carrée dans un voisinage de 0.

En revanche, comme $P'(x_0) \neq 0$, par le théorème des fonctions holomorphes implicites, il existe un voisinage (disons un disque $D(0)$) de 0 et un voisinage U_i (de $x_0 = a_i$) et une application holomorphe $f_i : D(0) \to U_i$ tels que, pour tout $(x, y) \in (U_i \times D(0)) \cap X_{g_2,g_3}$, on ait $x = f_i(y)$. Alors l'application $y \mapsto (f_i(y), y)$ est un homéomorphisme de $D(0)$ sur son image (d'inverse donné par la projection évidente $(x, y) \mapsto y$ au voisinage de $(a_i, 0)$).

On dispose donc de 4 cartes qui recouvrent X_{g_2,g_3} (quitte à restreindre, on peut supposer que les voisinages U_i sont disjoints). Pour montrer que l'on a obtenu un atlas holomorphe, il faut vérfifier que sur la composée $z \mapsto \sqrt{P'(z)}$ et $z \mapsto f(z)$ sont holomorphes ce que l'on sait déjà. On a bien montré que X_{g_2,g_3} est uen surface de Riemann et on a même trouvé des cartes locales.

On identifie $\mathbb{C}^2$ avec le complémentaire $\mathbb{C}P^2 - \mathbb{C}P^1$ de l'hyperplan projectif $z = 0$. C'est à dire qu'on considère l'homéomorphisme $\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\simeq} \mathbb{C}P^1$ donné par $(x, y) \mapsto [x, y, 1]$ (qui est une carte locale de ma structure complexe de $\mathbb{C}P^2$, voir la feuille de TD 1). En particulier, c'est un plongement, et donc sa restriction à X_{g_2,g_3} aussi. On identifie désormais X_{g_2,g_3} avec son plongement dans $\mathbb{C}P^2$.

ii) Par définition $C_{g_2,g_3} = \{[x, y, z] \in \mathbb{C}P^2,\ y^2z - 4x^3 + g_2xz^2 + g_3z^3 = 0\}$ car l'équation $y^2z - 4x^3 + g_2xz^2 + g_3z^3 = 0$ est l'homogénéisée de $y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3 = 0$. On a $C_{g_2,g_3} = p(G^{-1}(0))$ où $G : \mathbb{C}^3 - \{0\} \to \mathbb{C}$ est l'application continue $G(x, y, z) = y^2z - 4x^3 + g_2xz^2 + g_3z^3$ et $p : \mathbb{C}^3 - \{0\} \to \mathbb{C}P^2$ est la projection. En particulier, G étant continue et homogène, C_{g_2,g_3} est fermé dans le compact $\mathbb{C}P^2$, donc compact.

On remarque que si $[x, y, z] \in C_{g_2,g_3}$ vérifie $z \neq 0$, alors $[x, y, z] = \left[\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}, 1\right] \in X_{g_2,g_3}$. On a donc juste rajouté des points à X_{g_2,g_3} situés sur la droite (projective) à l'infini. Déterminons ces points: ils sont solution de $4x^3 = 0$, donc $x = 0$. Comme $z = 0$, cela force $y \neq 0$ et on en déduti qu'il y a un seul point dans $C_{g_2,g_3} \setminus X_{g_2,g_3}$, le point $[0, 1, 0]$!

[4] sinon, on aurait $y^3 = (y^2 + A(x)y + B(x))(y + C(x)) = y^3 + P(x)$ ce qui donnerait $P(x) = C^3(x)$, $B(x) = C^2(x)$ ce qui est absurde car P n'est pas le cube d'une fonction méromorphe (sinon ses racines seraient au moins triples)

Pour montrer que c'est une surface de Riemann, on calcule

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -12x^2 + g_2 z^2, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 2yz, \qquad \frac{\partial G}{\partial z} = y^2 + 2g_2 xz + g_3 z^2.$$

On sait déjà que si $z \neq 0$, une de ces dérivées n'est pas nulle (puisque c'est le cas pour X_{g_2,g_3}). Si $z = 0$, alors on a vu que $x = 0$ et $y \neq 0$, d'où il suit que $\dfrac{\partial G}{\partial z} \neq 0$. On en déduit qu'aucun point n'est singulier, et donc, d'après un théorème du cours, C_{g_2,g_3} est une surface de Riemann. On peut même rajouter, en utilisant le théorème des fonctions holomorphes implicites appliqué dans la carte $(x, z) \mapsto [x, 1, z]$ de $\mathbb{C}P^2$, que au voisinage du point à l'infini $[0, 1, 0]$, une carte locale est donnée par $x \mapsto [x, 1, g(x)]$ où g est une fonction holomorphe (d'un voisinage de 0 dans un voisinage de 0)

iii) On étend l'application $X_{g_2,g_3} \to \mathbb{C}$ définie par $(x, y) \mapsto x$ en une application $q : C_{g_2,g_3} \to \mathbb{C}P^1$ en envoyant le point à l'infini $[0, 1, 0]$ sur $\infty \in \mathbb{C}P^1$. Il faut montrer que cette application (notée q) est holomorphe (et en particulier continue). Pour cela, on l'évalue dans des cartes locales. Au voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in X_{g_2,g_3}$ tel que $y_0 \neq 0$, on doit vérifier que la composée $x \mapsto (x, \sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}) \mapsto x$ est holomorphe, ce qui est trivial (c'est même un isomorphisme local). Au voisinage d'un point $(a_i, 0)$, on considère la composée $y \mapsto (f_i(y), y) \mapsto f_i(y)$ qui est holomorphe car f_i l'est. Enfin au voisinage du point à l'infini, on considère la composée $x \mapsto [x, 1, g(x)] = [x/g(x), 1/g(x), 1] \mapsto x/g(x) \mapsto g(x)/x$ (on rappelle qu'une carte au voisinage de $\infty \in \mathbb{C}P^1$ est donnée par $z \mapsto 1/z$). Il faut montrer que $g(x)/x$ est holomorphe. Or g est une fonction holomorphe qui s'annule en 0 donc de la forme $xh(x)$ avec h holomorphe ce qui termine la démonstration.

On peut remarquer, qu'en coordonnées l'application se lit $[x, y, z] \mapsto [x, z] \in \mathbb{C}P^1$.

Remarque : L'application $(x, y) \mapsto x$ s'étend donc en un morphisme de surfaces de Riemann $C_{g_2,g_3} \to \mathbb{C}P^1$ entre surfaces compact, donc en un revêtement ramifié. Ce morphisme est de degré 2, car, pour tout $x \in X_{g_2,g_3} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$, cette application a 2 préimages distinctes (et a une dérivée non nulle). Les points a_i et l'infini $[0, 1, 0]$ ont un seul antécédent par cette application; ils sont donc ramifiés d'ordre 2 (puisque la multiplicité est constante sur une surface connexe).

2. Commençons par quelques rappels sur la fonction $\mathcal{P}$ de Weierstrass. C'est une fonction méromorphe et paire sur $\mathbb{C}$ qui est de plus Γ périodique. Elle définit donc une fonction méromorphe sur $E_\tau = \mathbb{C}/\Gamma_\tau$. Elle a un *unique* pôle en $[0] \in E_\tau$ qui est d'ordre 2 et est surjective de E_τ sur $\mathbb{C}P^1$ (car $\mathbb{C}P^1$ est connexe et E_τ compact, voir la feuille de TD 1 ou le cours). Il suit alors que pour tout $u \in \mathbb{C}$, l'équation $\mathcal{P}(z) = u$ a exactement 2 solutions (avec multiplicité). Par parité, si z est solution, $-z$ aussi et donc cette équation a 2 solutions distinctes, sauf si $2z \in \Gamma_\tau$, c'est à dire $[z] \in \{[1/2], [\tau/2], [(1+\tau)/2]\}$. D'après le cours, $\mathcal{P}'(z)$ est impaire, méromorphe avec un unique pôle d'ordre 3 en $[0]$ et a 3 racines distinctes $[1/2]$, $[\tau/2]$ et $[(1+\tau)/2]$. Enfin, on a la relation fonctionnelle $(\mathcal{P}'(z))^2 = 4(\mathcal{P}(z))^3 - g_2(\tau)\mathcal{P}(z) - g_3(\tau)$ pour tout $z \in E_\tau$.

   i) Il suffit de vérifier que le polynôme $4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$ est à racines simples. Par surjectivité de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{C}$, on peut remplacer x par $\mathcal{P}(z)$. On obtient que les racines du polynômes sont celles qui correspondent à $\mathcal{P}'(z) = 0$, c'set à dire les points $\mathcal{P}(1/2), \mathcal{P}(\tau/2), \mathcal{P}((1+\tau)/2)$. Ces valeurs sont toutes distinctes, puisque de multiplicté 2 (elles correspondent à des valeurs de z où $\mathcal{P}'(z) = 0$) et que vu ci-dessus, il n'y a que 2 racines avec multiplictés possibles pour toute valeur de $\mathcal{P}(z)$.

   L'application $j : E_\tau - [\Gamma_\tau] \to \mathbb{C}P^2$ définie par $z \mapsto (\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z), 1)$ est un morphisme. En effet, vu le **1)**, dans un voisinage de $[z] \notin \{[1/2], [\tau/2], [(1+\tau)/2]\}$, ce morphisme lu dans une carte est donné par $z \mapsto \mathcal{P}(z)$ qui est une focntion holomorphe inversible (on est précisément en dehors d'un point où $\mathcal{P}'$ s'annule). Au voisinage de $[z] \in \{[1/2], [\tau/2], [(1+\tau)/2]\}$, une carte locale est donnée par $z \mapsto \mathcal{P}'(z)$ qui est holomorphe dont la dérivée ne s'annule pas (car ses racines sont simples). L'application $j(z) = (\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z), 1)$ est surjective puisque $\mathcal{P}(-z) = \mathcal{P}(z)$ et $\mathcal{P}'(-z) = -\sqrt{\,}'(z)$ et que l'image $\mathcal{P}(\mathbb{C} - \Gamma_\tau)$ est $\mathbb{C}$ tout entier. Enfin cette application est injective vu les considérations ci-dessus: en effet les solutions de $\mathcal{P}(z) = u$ sont z et $-z$ (pour lesquels $\mathcal{P}'(z) \neq \mathcal{P}'(-z)$ sauf si précisément $[z] \in \{[1/2], [\tau/2], [(1+\tau)/2]\}$ ce qui correspond précisément aux points a_1, a_2, a_3 de la question **1)**.

   Par conséquent, l'application j est un morphisme injectif et surjectif de surfaces de Riemann, donc un isomorphisme (cf la feuille de TD 1). On l'étend en un morphisme $\tilde{j} : E_\tau \to C_{g_2,g_3}$ en définissant $\tilde{j}([0]) = [0, 1, 0]$ le point à l'infini de C_{g_2,g_3}. Pour vérifier que l'application est encore holomorphe, il suffit de le vérifier dans des cartes au voisinage de $[0]$ et $[0, 1, 0]$. Mais au vosinage d'un tel point l'application devient $0 \neq z \mapsto [\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z), 1] = \left[\dfrac{\mathcal{P}(z)}{\mathcal{P}'(z)}, 1, \dfrac{1}{\mathcal{P}'(z)}\right] \to \dfrac{\mathcal{P}(z)}{\mathcal{P}'(z)}$ qui est bien holomorphe car $\mathcal{P}'(z)$ a un pôle d'ordre 3 en 0 alors que $\mathcal{P}$ n'a qu'un pôle d'ordre 2. On en déduit encore que $\tilde{j} : E_\tau \xrightarrow{\sim} C_{g_2,g_3}$ est un isomorphisme.

ii) Rappelons qu'une forme différentielle holomorphe sur une surface de Riemann est une forme différentielle ω telle que, pour tout $z_0 \in X$ et toute carte locale au voisinage de z_0, la forme différentielle (lue dans la carte) sécrit $f(z)\,d\,z$ où f est une fonction holomorphe. Comme les changements de carte sont holomorphes, cette propriété ne dépend *pas* du choix de la carte locale.

Réciproquement, étant donné un atlas holomorphe $(X \supset U_i \xrightarrow{\phi_i} D_i \subset \mathbb{C})_{i\in I}$ pour X, et des fonctions holomorphes $f_i : D_i \to C$. Les formes différentielles locales $f_i(z)dz$ (définie sur la carte U_i) définissent une forme différentielle holomorphe sur X si et seulement si elles sont compatibles avec les changements de carte: c'est à dire que pour tout couple $(i,j) \in I^2$ et tout $z \in \phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$, on a

$$f_i(z) = f_j\big(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(z)\big)\,\frac{d\,(\phi_j \circ \phi_i^{-1})}{d\,z}\,(z). \tag{1}$$

En notant z_i et z_j les coordonnées locales sur les cartes U_i et U_j, l'équation (1) se comprend peut-être mieux sous la forme équivalente

$$f_i(z_i)d\,z_i = f_j(z_j)d\,z_j.$$

Passons à la question posée. Pour tout choix d'une racine carrée au voisinage d'un point $x \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$, la fonction devient $x \mapsto 1/y(x)$ où $y(x) = \sqrt{4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)}$; c'est à dire une fonction holomorphe définie sur un ouvert de C_{g_2,g_3}. de l'équation $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$, on déduit

$$\frac{2y'(x)}{12x^2 - g_2} = \frac{1}{y(x)} \tag{2}$$

pour tout $x \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$. On étend alors la forme différentielle $\dfrac{d\,x}{y(x)}$ par la forme différentielle $\dfrac{2\,d\,y}{12x(y)^2 - g_2}$ au voisinage des points $y = 0$ (c'est à dire $x \in \{a_1, a_2, a_3\}$). Vu l'équation (2), cette forme différentielle est bien définie sur X_{g_2,g_3} et holomorphe (chaque fonction est holomorphe). Enfin, au voisinage du point à l'infini, la forme différentielle $x \mapsto 1/y(x)$ est holomorphe (C_{g_2,g_3} est défini, dans la carte $(x,z) \mapsto [x,1,z]$, par léquation $z + g_3z^3 = 4x^3 + g_2xz^2$ (par **1).ii)**). Dans le voisinage[5] du point infini $[0,1,0]$, on a $[x,1,z] = [x/z, 1/z, 1]$; donc le changement de cartes qui nous intérèsse est de la forme $x \mapsto \dfrac{x}{z(x)}$ et on doit donc exprimer $\dfrac{d\,x}{d\,y} = z\,d\,\dfrac{x}{z}$ sous la forme $g(x)d\,x$ avec g holomorphe. On a $z\,d\left(\dfrac{x}{z}\right) = \dfrac{z(x) - xz'(x)}{z(x)}\,d\,x$. De la relation $z + g_3z^3 = 4x^3 + g_2xz^2$, on déduit $z(x) = 4x^3\alpha(x)$ (où α est holomorphe et $\alpha(0) = 1$) et en dérivant on obtient

$$z'(x) = 12x^2 + z(x)\,\big(g_2z(x) + 2g_2xz'(x) - 3g_3z(x)\,z'(x)\big)$$

ce qui montre que $\dfrac{z(x) - xz'(x)}{z(x)}$ est holomorphe au voisinage de $x = 0$ (et vaut même -2 en 0).

On a bien montré que $\dfrac{d\,x}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$ s'étend à toute la courbe C_{g_2,g_3}. On note $f(x)\,d\,x$ cette forme différentielle.

iii) Puisque $f(x)\,d\,x$ est holomorphe, elle admet des primitives *holomorphes localement* (en particulier sur tout voisinage simplement connexe de $\mathbb{C} - \{a_1, a_2, a_3\}$). Soit $u_0 \in \mathbb{C} - \{a_1, a_2, a_3\}$, et soit η un chemin du point à l'infini vers u_0 dans C_{g_2,g_3} (qui existe par connexité). Alors sur un disque $D(u_0) \subset \mathbb{C} - \{a_1, a_2, a_3\}$, la fonction $z(u) = \displaystyle\int_u^\infty f(x)d\,x := \int_u^{u_0} f(x)d\,x + \int_\eta f(x)d\,x$ est bien définie et holomorphe (par existence de la primitive holomorphe). Notons que l'intégrale $\displaystyle\int_\eta f(x)d\,x$ est bien définie puisque $f(x)d\,x$ est holomorphe sur C_{g_2,g_3} qui est compact; autrement dit intégrer la forme différentielle jusqu'au point à l'infini ne pose aucun problème; bien entendu les problèmes de convergence éventuels ont été résolu lorsque on a montré que l'on pouvait étendre la forme différentielle au voisinage de l'infini). Que f n'admet pas de primitive globale découlera de la question v). La fonction $z(u)$ définie dans $D(u_0)$ dépend bien entendu du choix du chemin de l'infini à u_0 (mais pas des chemins dans $D(u_0)$ de u à u_0).

[5](privé du point à l'infini)

iv) Pour tout point $u \in \mathbb{C} - \{a_1, a_2, a_3\}$, on applique la question précédente pour obtenir une formule holomorphe dans un voisinage de u (définie à une constante près). On obtient alors $\frac{dz}{du} = \frac{1}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}} = \frac{1}{y(u)} \neq 0$; en particulier, $u \mapsto z(u)$ est localement un isomorphisme (par le théorème d'inversion locale). On obtient alors, localement, $\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \frac{1}{y(u)^2}$ et $\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = y(u)^2 = 4u^3 - g_2u - g_3$. Vu les propriétés de la fonction de Weierstrass et les arguments de la question **i)**, on a alors que $u = \mathcal{P}(t)$ et $y(u) = \mathcal{P}'(t)$ et $t \mapsto (u(t) = \mathcal{P}(t), u'(t) = \mathcal{P}'(t))$ est localement un isomorphisme. En particulier, localement t est aussi une primitive $\int \frac{1}{u'(t)}\, du = \int \frac{1}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}\, du$. Au voisinage du point à l'infini, on a $z(\infty) = 0$ et $t(\infty) = 0$ car $\mathcal{P}(0) = \infty$. Il suit que $z(u) = t(u)$ au voisinage du point à l'infini. Par connexité de $\mathbb{C}_{g_2,g_3}$, on conclut que $z = t$ (car l'ensembel des poitns où ces fonctiosn coincident est fermé par définition et ouvert par unr aisonnement similaire à celui du point à l'infini).
Finalement, on a obtenu que $u = \mathcal{P}(z)$; en particulier z est une coordonnée locale et une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \to E_\tau$ (puisque $\mathcal{P}$ l'est).

v) Comme $x = \mathcal{P}(z)$, $y = \mathcal{P}'(z)$, on obtient que dans une carte donnée par z, on a

$$f(x)\,d\,x = \frac{d\,x}{y} = \frac{d\left(\mathcal{P}(z)\right)}{\mathcal{P}'(z)} = \frac{\mathcal{P}'(z)\,d\,z}{\mathcal{P}'(z)} = d\,z.$$

Mais alors tout chemin $\beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ induit un chemin $\eta = \mathcal{P}(\beta) : [0,1] \to C_{g_2,g_3}$ et on obtient $\int_\eta f(u)d\,u = \int_\beta d\,z$. En particulier si on prend pour η le chemin $\gamma_\tau : t \mapsto (1-t)\tau/2$ qui va de $\tau/2$ à 0 en suivant le vecteur τ, on obtient $\int_{\gamma_\tau} f(x)d\,x = -\tau/2$.

Considérons maintenant un lacet $\theta \mapsto a_1 + r\exp(i\theta)$ autour de $a_1 = \mathcal{P}(\tau/2)$ (avec r petit). Lorsque θ passe de 0 à 2π la détermination de la racine carrée change en son opposé. En effet, dans un voisinage suffisamment proche de a_1, comme $(x-a_2)(x-a_3) \neq 0$ on a peut choisir une fonction holomorphe $h(y)$ telle que $(x(y)-a_2)(x(y)-a_3) = h^2(y)$. Alors $y^2 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) = r\exp(i\theta)h^2(r\exp(i\theta)$. et il suit que $y = \sqrt{r}\exp(i\theta/2)h(r\exp(i\theta))$. Donc lorsque θ varie de 0 à 2π, y change en $-y$. Il suit (en remarquant que la valeur de l'intégrale est indépendante du choix des chemins sur un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C} - \{a_1, a_2, a_3\}$) que $\int_{a_1 + r\exp(i\theta)} f(x)d\,x = -\int_{\gamma_\tau} f(x)d\,x - \int_{\gamma_\tau} (-f(x))d\,x = \tau$ (en particulier n'est pas nul et appartient au réseau Γ). Ceci montre que la fonction $z(u)$ de la question **iii)** ne peut pas être définie comme une fonction holomorphe globalement.

Exercice 4. Calculer $g_2(i)$ et $g_3\left(\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})\right)$. En déduire que si g_2 ou g_3 est nul, alors il existe un réseau Γ tel que E_Γ est isomorphe à C_{g_2,g_3}.

Solution 4. Soit $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$. Rappelons que $g_2(\tau) = 60 \sum_{z \in \Gamma - \{0\}} \frac{1}{z^4}$ et $g_3(\tau) = 140 \sum_{z \in \Gamma - \{0\}} \frac{1}{z^6}$.

$\tau = i$ On calcule

$$\frac{g_3(i)}{140} = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 - \{(0,0)\}} \frac{1}{(n+im)^6} = \sum_{nm>0} \frac{1}{(n+im)^6} + \sum_{nm<0} \frac{1}{(n+im)^6} + \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{n^6} + \sum_{m \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{1}{(im)^6}.$$

Or $i^6 = -1$ et de plus l'application $n + im \mapsto m - in$ est une bijection (c'est simplement la multiplication par $-i$) de l'ensemble des $\{n + im,\ nm > 0\}$ sur l'ensemble de ses conjugués $\{k + il,\ kl < 0\}$. Il suit que $\sum_{nm>0} \frac{1}{(n+im)^6} + \sum_{nm<0} \frac{1}{(n+im)^6} = \sum_{nm>0} \left(\frac{1}{(n+im)^6} - \frac{1}{(-i)^6(n+im)}\right) = 0$ et de même $\sum_{m \in \mathbb{Z} - \{0\}} \left(\frac{1}{n^6} + \frac{1}{(in)^6}\right) = 0$. D'où $g_3(i) = 0$.

On en déduit que $g_2(i) \neq 0$; sinon les zéros de de $4x^3 + g_2(i)x - g_3(i)$ ne seraient pas isolés (On aurait 0 d'ordre 3 comme racine), ce qui est absurde vu la question 2.i) de l'exercice précédent. On peut aussi, partitionner le plan en ses 4 quadrants, puis montrer que $\dfrac{g_2(i)}{60} = 4 \displaystyle\sum_{(n,m)\in\mathbb{N}*\times\mathbb{N}} \frac{1}{(n+im)^4}$ et en déduire par le calcul que cette somme est non-nulle...

$\tau = j$ On note $j = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3} = \exp(2i\pi/3)$. En particulier $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$. De manière similaire au cas précédent, on va calculer $g_2(j)$ en partitionant le plan en 3 secteurs angulaires égaux. Soit $\Gamma_1 = \Gamma \cap \left\{ r\exp(i\theta),\ 0 < \theta \leqslant \frac{2i\pi}{3} \right\}$, $\Gamma_2 = \Gamma \cap \left\{ r\exp(i\theta),\ \frac{2i\pi}{3} < \theta \leqslant 4i\pi/3 \right\}$ et $\Gamma_3 = \Gamma \cap \left\{ r\exp(i\theta),\ \frac{4i\pi}{3} < \theta \leqslant 2i\pi \right\}$. On a une bijection de Γ_1 sur Γ_3 donnée par $n + jm \mapsto j^2(n + jm) = m + j^2 n = m + j(-n)$. La multiplication par j^2 induit aussi une bijection de Γ_3 sur Γ_2. Ainsi les Γ_i sont en bijection deux à deux (les bijections étant donnée par multiplication par j ou j^2 et réindiçage). Comme $j^4 = j$ et $(j^2)^4 = j^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\frac{g_2(j)}{60} &= \sum_{z\in\Gamma_1} \frac{1}{z^4} + \sum_{z\in\Gamma_2} \frac{1}{z^4} + \sum_{z\in\Gamma_3} \frac{1}{z^4} \\ &= \sum_{z\in\Gamma_1} \left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{(jz)^4} + \frac{1}{(j^2 z)^4} \right) = \left(1 + j + j^2\right) \sum_{z\in\Gamma_1} \frac{1}{z^4} = 0.\end{aligned}$$

De même qu'à la question précédente, il suit aussi que $g_3(j) \neq 0$.

Par homogénéité, si on change le réseau Γ en le réseau $c\Gamma$, on a[6] $g_2(c\tau) = c^{-4} g_2(\tau)$ et $g_3(c\tau) = c^{-6} g_3(\tau)$. Il suit que si $g_2 \neq 0$, alors quitte à faire une homothétie (de rapport $\sqrt[4]{g_2(i)/g_2}$) on peut trouver un réseau $c\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ tel que $g_2(\Gamma) = g_2$ (explicitement $\tau = i\sqrt[4]{g_2(i)/g_2}$). On peut faire le même raisonnement avec g_3 (en prenant j à la place de i). D'où, si g_2 ou g_3 est nul, on peut trouver un réseau Γ tel que $g_i(\Gamma) = g_i$ (avec en plus Γ homothétique à $\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \oplus j\mathbb{Z}$.)

Exercice 5 (Une surface de degré 3)**.** Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \,/\, x^3 + y^3 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$.

1. Montrer que X est une surface de Riemann et exhiber un atlas. Vérifier que les projections canoniques $p_1, p_2 : X \to \mathbb{C}$ définie par $p_1(x, y) = x$ et $p_2(x, y) = y$ sont holomorphes. Quels sont les points de ramification de p_1 ?
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$. On pourra intégrer la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{1-z^3}}$ sur l'image par p_1 d'un lacet bien choisi de X.
3. Soit $Y = \{[x, y, z] \in \mathbb{C}P^2 \,/\, x^3 + y^3 = z^3\}$. Vérifier que Y est bien définie et est une surface de Riemann plongée dans $\mathbb{C}P^2$. Montrer que l'application $\phi : Y \to \mathbb{C}$ définie par $[x, y, z] \mapsto \dfrac{y}{z}$ est méromorphe. Quels sont ses pôles ?
4. Construire un plongement holomorphe $j : X \hookrightarrow Y$ de X dans Y et un morphisme $q : Y \to \mathbb{C}P^1$ qui prolonge p_1. (on identifie $\mathbb{C}$ avec le complémentaire d'un hyperplan à l'infini de $\mathbb{C}P^1$).
5. Quel est le genre de Y ?

Solution 5. On note $j = \exp(2i\pi/3)$ une des (deux) racines primitives troisièmes de l'unité.

1. La courbe définie par le polynôme $P(x, y) = x^3 + y^3 - 1$ est *non-singulière* car ses dérivées partielles

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$$

ne s'annule respectivement que pour $x = 0$ et $y = 0$. Or le point $(0, 0)$ n'est pas solution de l'équation $P(x, y) = 0$. Ceci prouve donc que le sous-espace des solutions $X \subset \mathbb{C}^2$ est une surface de Riemann (et même une sous-variété *complexe*).

[6] on fait un léger abus de notations pour $g_2(\tau)$ à la place de $g_2(\Gamma)$ ici

De plus, le polynôme $P(x,y) = x^3 + y^3 - 1$ est irréductible: en effet sinon on peut écrire $P = AB$ avec $\deg_y(A) = 2$ et $\deg_y(B) = 1$. Soit $A(x,y) = y^2 + a_1(x)y + a_2(x)$ et $B(x,y) = y + b(x)$ (on peut supposer A, B unitaires car le coefficient de y^3 est 1).D'où il suit que $a_2(x)b(x) = x^3 - 1$ et $b(x) + a_1(x) = 0 = a_2(x) + a_1(x)b(x)$. Ainsi $a_1 = -b$, puis $a_2 = b^2$ et donc $b^3(x) = x^3 - 1$ ce qui est absurde car $x^3 - 1$ a ses racines simples (et que las racines de b^3 sont de multiplicités divisibles par 3). Comme P est irréductible, on a que la surface X est *connexe*.

Remarque : la méthode employée ici est en fait une redémonstration dans ce cas particulier du critère d'irréductibilité d'Eisenstein, appliqué dans l'anneau $\mathcal{M}(x)[y]$ des polynômes en les fonctions méromorphes.

Pour exhiber des cartes, il suffit de reprendre la démonstration de la non-singularité. Au voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in X$ avec $y_0 \neq 0$, on peut écrire y comme une fonction holomorphe de x (en choisissant une détermination *locale* de la racine cubique telle que $y_0 = \sqrt[3]{1 - x_0^3}$, on a alors $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$). On a alors une carte $x \mapsto (x, \sqrt[3]{1 - x^3})$ d'un voisinage de x_0 vers un voisinage de (x_0, y_0). Et similairement au voisinage des points (x_0, y_0) tels que $y_0 = 0$ (il y en a 3: $(1, 0)$, $(j, 0)$ et $(j^2, 0)$), on peut trouver des cartes où x est une fonction holomorphe de y et obtenir une carte $y \mapsto (\sqrt[3]{1 - y^3}, y)$ d'un voisinage de 0 sur un voisinage de $(x_0, 0)$ (pour une détermination de la racine cubique telle que $\sqrt[3]{1} = x_0$). Ses cartes recouvrent bien tout X (qui est séparé, dénombrable à l'infini trivialement). On peut remarquer qu'elles exhibent X comme une sous-variété complexe (puisque comme localement le graphe d'une fonction holomorphe).

Sachant que X est une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^2$ et que les projections $p_1, p_2 : X \to \mathbb{C}$ définie par $p_1(x,y) = x$ et $p_2(x,y) = y$ sont des morphismes de variétés complexes, on peut en déduire que leurs restrictions à X sont holomorphes. On peut aussi le vérifier dans les cartes: dans une carte $\phi_1 : x \mapsto (x, \sqrt[3]{1 - x^3})$, $p_1 \circ \phi_1(x) = x$ est l'identité et dans une carte $\phi_2 : y \mapsto (\sqrt[3]{1 - y^3}, y)$, $p_1 \circ \phi_2(y) = \sqrt[3]{1 - y^3}$ est holomorphe. par conséquent p_1 est holomorphe, et le même argument marche pour p_2.

Il nous reste à déterminer les points de ramification de p_1. Au voisinage d'un point $x_0 \neq 1, j, j^2$, l'équation $P(x,y)$ a exactement 3 solutions distinctes (données par $(x, \sqrt[3]{1 - x^3})$, $(x, j\sqrt[3]{1 - x^3})$, $(x, j^2\sqrt[3]{1 - x^3})$ où on fixe une détermination quelconque de la racine cubique) et de plus, on a des homéomorphismes locaux d'un voisinage de $(x_0, \sqrt[3]{1 - x_0^3})$ (resp. $(x_0, j\sqrt[3]{1 - x_0^3})$, $(x_0, j^2\sqrt[3]{1 - x_0^3})$) sur un voisinage de x_0 (encore uen fois donnée par la détermination d'une racine cubique). Il suit qu'un tel point est non-ramifié et il y a donc au plus 3 points de ramification, donc p_1, qui est holomorphe, est un revêtement ramifié. De plus, $\#p^{-1}(x_0) = 3$, donc p_1 est un revêtement ramifié de degré 3.

Remarque : bien entendu on peut aussi établir que ces points (x_0, y_0) avec $x_0 \neq 1, j, j^2$ sont non-ramifiés en dérivant la fonction p_1 en x. En effet, on a vu qu'au voisinage de ces points on a une carte où p_1 est l'identité dont la dérivée est non-nulle partout.

Supposons maintenant que $x_0 \in \{1, j, j^2\}$. Alors $p^{-1}(x_0) = \{(x_0, 0)\}$ est réduit à un seul point qui est donc ramifié d'ordre le degré de p_1 (car X est connexe), c'est à dire 3 et x_0 est un point de branchement.

Remarque : bien entendu on peut aussi établir que ces points (x_0, y_0) avec $x_0 \neq 1, j, j^2$ sont non-ramifiés en dérivant la fonction p_1 en x. En effet, on a vu qu'au voisinage de ces points on a une carte où p_1 est l'identité dont la dérivée est non-nulle partout. là encore, on peut aussi raisonner dans des cartes. Au voisinage d'un point (x_0, y_0) avec $x_0 = 1, j, j^2$ (et donc $y_0 = 0$), une carte est donnée par $y \mapsto (\sqrt[3]{1 - y^3}, y)$. Lue dans cetet carte p_1 devient la fonction $y \mapsto f(y) = \sqrt[3]{1 - y^3}$ dont les dérivées $f'(0)$ et $f''(0)$ sont nulles. En revanche $f^{(3)}(0) = -2 \neq 0$.

Conclusion: les points de branchements de p_1 sont $1, j, j^2$. Et les points de ramification sont $(1, 0), (j, 0), (j^2, 0)$ qui sont ramifiés d'ordre 3.

2. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a un unique point réel y tel que $y^3 = 1 - x^3$. Donc on peut voir la fonction $\frac{1}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$ $x \in [0, 1[$ comme la fonction $(x, y) \mapsto \frac{1}{y}$ pour $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$ où on a choisi une détermination holomorphe de la racine cubique telle $\sqrt[3]{1} = 1$. La forme différentielle $\frac{dx}{y}$ est une forme différentielle holomorphe bien définie sur X. En effet, au voisinage d'un point (x_0, y_0) avec $y_0 \neq 0$, on a une carte locale $x \mapsto (x, y(x))$ avec $x \mapsto y(x)$ holomorphe[7] non-nulle. Au voisinage d'un point $(x_0, 0) \in X$, on a une carte locale de la

[7]on a même une expression explicite $y\sqrt[3]{1 - x^3}$ pour une détermination de la racine cubique telle que $\sqrt[3]{1 - x_0^3} = y_0$

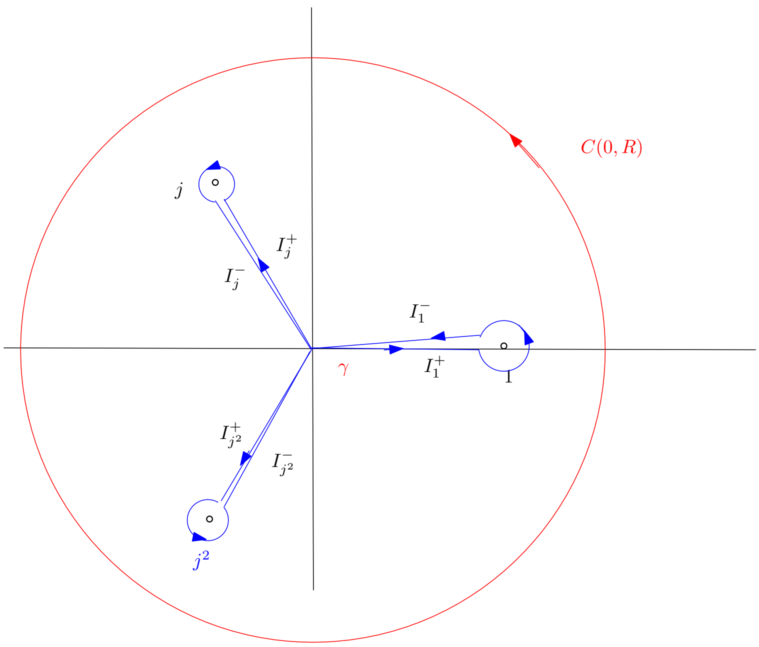

Figure 1: Le chemin γ et le cercle $C(0,R)$

forme $y \mapsto (\sqrt[3]{1-y^3}, y)$ (pour une détermination de la racine cubique telle que $\sqrt[3]{1} = x_0$).De plus de l'équation $x^3 + y^3 = 1$ on déduit $\frac{d\,x}{} = \frac{-y\,d\,y}{x^2}$. Comme la fonction $y \mapsto \frac{-y}{\sqrt[3]{1-y^3}}$ est holomorphe, on a montré que la forme différentielle $\frac{d\,x}{y}$ sétend en une forme différentielle holomorphe sur tout X.

Comme p_1 est un revêtement ramifié avec pour seuls points de branchement $1, j, j^2$, tout lacet $\gamma : S^1 \to \mathbb{C} - \{1, j, j^2\}$ se relève en un chemin $\widetilde{\gamma} : [0,1] \to X$ qui est unique si on fixe le relevé de $\gamma(0)$. C'est en particulier le cas du chemin γ représenté dans la figure 1 (où on fixe $\widetilde{\gamma}(0) = (0,1)$). Par unicité du prolongement holomorphe le long d'un chemin C^1, l'intégrale $\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{d\,x}{y} = \int_{\gamma} \frac{d\,x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. De plus le chemin γ est homotope au cercle $C(0,R)$ de rayon R décrit dans la figure 1. Par invariance de l'intégrale d'une forme holomorphe le long de chemins homotopes, on en déduit que $\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{d\,x}{y} = \int_{C(0,R)} \frac{d\,x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)} \frac{d\,x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. On paramètre le cercle $C(0,R)$ sous la forme $\theta \mapsto R\exp(i\theta)$ ($\theta \in [0, 2\pi]$). Alors

$$\frac{d\,x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{i\,R\exp(i\theta)\,d\,\theta}{\sqrt[3]{1-R^3\exp(i3\theta)}} = \frac{i\,R\exp(i\theta)\,d\,\theta}{\sqrt[3]{1+R^3\exp(i(3\theta+\pi))}} = \frac{i\,d\,\theta}{\exp(\frac{i\pi}{3})\sqrt[3]{\frac{-1}{R^3\exp(3i\theta)}+1}} = \frac{\exp\left(\frac{i\pi}{6}\right)\,d\,\theta}{\sqrt[3]{\frac{-1}{R^3\exp(3i\theta)}+1}}.$$

On en déduit que

$$\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{d\,x}{y} = \lim_{R\to\infty} \int_{C(0,R)} \frac{d\,x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \int_0^{2\pi} -\exp\left(\frac{i\pi}{6}\right)\,d\,\theta = 2\pi\exp\left(\frac{i\pi}{6}\right). \tag{3}$$

On évalue maintenant l'intégrale le long de γ. Le chemin γ se compose de 6 segments de 0 à $1, j, j^2$ (notés I_1^+, I_1^- etc... voir la figure 1) et 3 (arcs de) cercles c_1, c_j, c_{j^2} (centrés resectivement en $1, j, j^2$ et de rayon r).

Le cercle c_1 se paramètre par $\theta \mapsto 1 + r\exp(i\theta)$ ($\theta \in [-\pi, \pi]$). On factorise $(1-x^3) = (1-x)(j-x)(j^2-x) = (1-x)(1+x+x^2)$. Au voisinage de $x = 1$ (c'est à dire pour r tendant vers 0), la fonction holomorphe $x \mapsto 1 + x + x^2$ ne s'annule pas. En prenant un détermination de la racine cubique on peut donc écrire, au voisinage de $x = 1$, cette fonction sous la forme $-(1+x+x^2) = h^3(x-1)$ où h est holomorphe. Sur le cercle c_1, on a donc $(1-x^3) = r\exp(i\theta)\,h^3(r\exp(i\theta))$. Rappelons que sur le segment I_1^+, on a choisi pour

y la détermination réelle de la racine cubique. On en déduit que le long de c_1, on a

$$y(r\exp(i\theta)) = \sqrt[3]{1-\left(r\exp(it\theta)\right)^3} = \sqrt[3]{r\exp(i\theta)\, h^3(r\exp(i\theta))} = \sqrt[3]{r}\exp\left(\frac{i\theta}{3}\right) h(r\exp(i\theta)).$$

En particulier, lorsque θ varie de $-\pi$ à π, la valeur de y est multipliée[8] par $\exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right) = j$ et donc $\frac{d\,x}{y}$ est multiplié par j^2 $(= 1/j)$. Il suit que l'intégrale $\int_{I_1^-} \frac{d\,x}{y}$ le long de I_1^+ est égale[9] à $\int_{I_1^-} \frac{d\,x}{y} = -j^2 \int_{I_1^+} \frac{d\,x}{y}$ (les chemins sont parcourus dans des sens opposés).
De plus, le long de c_1, on a

$$\frac{d\,x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{ir\exp(i\theta)\,d\,\theta}{\sqrt[3]{r}\exp\left(\frac{i\theta}{3}\right)\, h(r\exp(i\theta))} = r^{2/3}\, k(r\exp(i\theta))\,d\,\theta$$

où $k(r\exp(i\theta))$ est une fonction dont le module est bornée uniformément pour r proche de 0. Il suit que l'intégrale $\int_{c_1} \frac{d\,x}{y}$ tend vers 0 quand r tend vers 0.
Le chemin I_j^+ est obtenu en multipliant le chemin I_1^+ par j (dans le plan $\mathbb{C}$), c'est à dire en remplaçant x par jx. Mais on a vu que la valeur de $y = \sqrt[3]{1-x^3} = \sqrt[3]{1-(jx)^3}$ a aussi été multipliée par j après que x ait parcouru $I_1^+ \cup c_1 \cup I_1^-$. Donc $\int_{I_j^+} \frac{d\,z}{y(z)} = \int_{x\in I_1^+} \frac{d\,(jx)}{jy(x)} = \int_{I_1^+} \frac{d\,x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

Le même raisonnement se fait *mutatis mutandis* au voisinage de j et j^2. Il suit donc que $\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{d\,x}{y} = 3(1-j^2)\int_{I_1^+} \frac{d\,x}{y}$. Comme $\int_{I_1^+} \frac{d\,x}{y} = \int_0^1 \frac{d\,x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ (pour la détermination réelle de la racine cubique), on déduit alors de l'égalité précédente et de la relation (3) que

$$\int_0^1 \frac{d\,x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{2\pi\exp(i\pi/6)}{3(1-j^2)} = \frac{2\pi(\frac{\sqrt{3}+i}{2})}{3(\frac{3+i\sqrt{3}}{2})} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3. La courbe Y est obtenue en homogénéisant l'équation de X. Elle est donc aussi irréductible. On note encore $P(x,y,z) = x^3+y^3-z^3$ l'homogénéisé de P. La courbe Y est aussi non-singulìere car pour $z \neq 0$ on sait de la question 1) que $\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2$, $\quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$ sont non-nuls. Enfin si $z = 0$, les solutions de la courbe sont les solutions de $x^3 = -y^3$ avec $[x,y,0] \in \mathbb{C}P^2$ (soit $[x,y] \in \mathbb{C}P^1$), c'est à dire $\frac{x}{y} = -1, -j, -j^2$ pour lesquels $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$ (et $\frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$). Il suit (on peut appliquer le théorème des fonctions implicites pour avoir des cartes) que Y est une surface de Riemann et une sous-variété de $\mathbb{C}P^2$.
De plus sur l'ouvert (de carte) $U_3 = \{[x,y,z] \in \mathbb{C}P^2,\ z \neq 0\}$, on a $Y \cap U_3 = j(X)$ où $j : \mathbb{C}^2 \to U_3 \subset \mathbb{C}P^2$ est la carte $(u,v) \mapsto [x,y,1]$. Comme j est un homéomorphisme, il suit que sa restriction à X est un homéomorphisme de X sur $j(X) = Y \cap U_3$ qui est un ouvert de Y. De plus, j est un plongement holomorphe. En effet, j est holomorphe (c'est évident dans des cartes où en remarquant que j est une carte d'un atlas holomorphe de $\mathbb{C}P^2$ et que X est une sous-variété complexe de $\mathbb{C}^2$) et inversible (cf la feuille de TD 1 et le cours). On peut donc identifier Y avec la surface de Riemann X à laquelle on a ajouté 3 points $([-1,1,0], [-j,1,0], [-j^2,1,0])$ à l'infini.

Il est équivalent de montrer que ϕ est méromorphe ou que ϕ sétend en un morphisme $Y \to \mathbb{C}P^1$. Si $z \neq 0$, alors, $[x,y,z] = \left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right]$ et l'application $\phi \circ j$ est égale sur l'ouvert $j(X)$ à p_2, d'où ϕ est holomorphe. Il reste à vérifier que ϕ est holomorphe au voisinage des points à l'infini. Pour cela on se place dans des cartes au voisinage du point $[-1,1,0]$. Il suffit de se restreindre à (l'ouvert de cartes) $U_2 = \{[x,y,z] \in \mathbb{C}P^2,\ y \neq 0\} \cong \{[x,1,z] \in \mathbb{C}P^2\}$. La courbe Y s'identifie alors à la courbe de $\mathbb{C}^2$ déquation $x^3+1 = z^3$ (m̂eme raisonnement que pour identifier X à un ouvert de Y). Comme, ans U_2,

[8] c'est évidemment un phénomène général qui vient du fait que 1 est un point de ramification d'ordre 3
[9] lorsque r tend vers 0, c'est à dire quand les chemins I_1^+ et I_1^- se confondent au sens de parcours près

$\partial P \partial x = 3x^2 \neq 0$ au voisinage de -1, on peut appliquer le théorème des fonctions holomorphes implicites pour exprimer *au voisinage de* $[-1, 1, 0]$, x comme une fonction holomorphe de z. En particulier, on peut choisir une carte de la forme $\psi_2 : z \mapsto [x(z), 1, z]$. Il suit que dans cette carte on a $\phi \circ \psi_2([z]) = \dfrac{1}{z}$ qui est méromorphe avec un pôle simple en 0.

Le raisonnement s'applique identiquement aux 3 points à l'infini. Par conséquent, ϕ est méromorphe sur Y. Elle a donc 3 pôles simples en $[-1, 1, 0]$, $[-j, 1, 0]$et $[-j^2, 1, 0]$. Elle n'a aps dautres pôles, car en dehors des points à l'infini elle s'identifie avec p_2. Notons que cette application est un revêtement ramifié (c'est un morphisme de Y vers $\mathbb{C}P^1$ entre surfaces de Riemann compactes) de degré 3 (qui est constant par connexité), car, sur X, l'équation $p_2(x, y) = y_0$ a 3 solutions (avec multiplictés). Notons que le morphisme induit $\phi : Y \to \mathbb{C}P^1$ sécrit simplement $[x, y, z] \mapsto [y, z]$ $(= [y/z, 1]$ si $z \neq 0)$; on peut noter que si $[x, y, z] \in Y$, alors nécéssairement $(y, z) \neq (0, 0)$.

4. On a construit $j : X \to Y$ dans la question précédente. Il est clair aussi que l' on peut construire une application méromorphe $q : Y \to \mathbb{C}$ qui prolonge l'application p_1 de la même façon que l'on a montré que l'application ϕ proonge p_2 dans la question précédente. Explicitement on a $q([x, y, z] = [x, z]) \in \mathbb{C}P^1$.

5. Il suffit d'appliquer la formule de Riemann-Hurwitz au revêtement ramifié $q : Y \to \mathbb{C}P^1$ qui est de degré 3. On a $2(1-g_Y) = 2 \cdot 3 - \sum_{y \in Y} (\mathrm{ord}_{y,q} - 1)$. On a vu que les points à l'infini ne sont pas ramifiés (ce sont des pôles simples). Les points de ramification de p_1 sont donc $[1, 0, 1]$, $[j, 0, 1]$ et $[j^2, 0, 1]$ d'après la question 1). Ils sont ramifiés d'ordre 3 ce qui donne $2g_Y = 2 - 6 + 2 + 2 + 2$, c'est 'a dire que Y est de genre 1.

Exercice 6. Soit $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ un réseau de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ sa fonction de Weierstrass. Soit f une fonction méromorphe paire sur la courbe elliptique $E_\tau = \mathbb{C}^2/\Gamma$. On suppose que f a exactement n zéros $a_1, \ldots, a_n$ distincts et m pôles $b_1, \ldots, b_m$ dans un domaine fondamental P et qu'ils sont dans l'intérieur de P.

1. Montrer que si a_i ou b_j est dans l'intérieur de P, alors son conjugué $1 + \tau - a_i$ est un zéro de f et $1 + \tau - b_j$ est un pôle de f.

2. Montrer que si a_i (resp. b_j) est sur le bord ∂P de P alors il admet trois autres zéros (resp. pôles) conjugués distincts (que l'on explicitera).

3. Montrer que $f(z) = \lambda \dfrac{\prod_{i \in Z_f} (\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_i))}{\prod_{j \in P_f} (\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_j))}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une constante et Z_f (resp. P_f) est un ensemble de représentant de chaque zéro (resp. pôles) *non nul* (à conjugaison près).

Solution 6. Quitte à faire une translation, on considère que le domaine fondamental a son sommet en bas à gauche, placé en l'origine de $\mathbb{C}$.

1. Par périodicité et parité de la fonction f, on a $f(1 + \tau - a_i) = f(-a_i) = f(-a_i) = 0$. Donc $1 + \tau - a_i$ est aussi une racine de f. Comme le symétrique du domaine fondamental P par rapport à son sommet en bas à gauche coincide avec P via la transaltion de vecteur $1 + \tau$, le point $1 + \tau - a_i$ est de plus à l'intérieur du domaine fondamental P puisque a_i l'est aussi. Voir figure 2 ci-dessous.

   Notons que $a_i \neq 1 + \tau - a_i$, sinon a_i est un zéro de multiplicité 2 (il suffit de dériver l'identité $f(1+\tau-z) = f(z)$ en $z = (1 + \tau)/2$ pour vérifier que $f'((1 + \tau)/2) = 0$ et donc le zéro est multiple)

   Le même raisonnement s'applique pour un pôle.

2. En utilisant la parité et périodicité comme dans la question précédente, on obtient que si a_i est sur le bord $[0, \tau]$, alors $1 + a_i$, $\tau - a_i$ et $1 + \tau - a_i$ sont des racines et sont sur le bord de P (a_i et $\tau - a_i$ sont de plus sur le même segment et $1 + \tau - a_i$, $1 + a_i$ sont aussi sur un même segment, parallèle au précédent). On a un raisonnement similaire quel que soit le segment du bord de P sur lequel se trouve a_i et pour les pôles b_j. Notons que, comme dans la question précédente, si a_i (resp. b_j) est au milieu d'un segment alors, il n'y a que 2 conjugués distincts qui sont chacun de multiplicité 2 ce qui est exclu par hyothèse.

   Par conséquent, les racines et pôles placés sur le bord de P sont groupés en groupe de 4 situés sur des bords parallèles.

3. On choisit un représentant de chaque classe déquivalence pour la conjugaison (chaque classe a 2 éléments si elle est dans l'intérieur de P et 4 sinon). On constate alors que la fonction $g = \dfrac{\prod_{i \in Z_f} (\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_i))}{\prod_{j \in P_f} (\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_j))}$

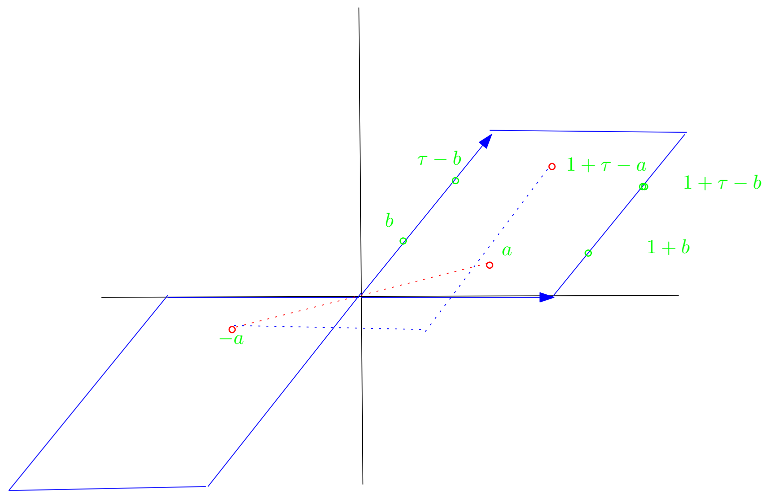

Figure 2: Le domaine p et les conjugués de deux points a, b

est méromorphe (car c'est une fonction rationnelle en la fonction de Weierstrass qui est méromorphe). Elle a de plus exactement le même nombre de racines et de pôles (avec multiplicté) que f (car $\mathcal{P}$ est paire et périodique). Il suit que le quotient $\dfrac{f}{g}$ est une fonction méromorphe sans pôles sur E_τ. Elle est donc holomorphe, et E_τ compact, implique que cette fonction est constante, donc $f = \lambda g$.