Corrigé de la Feuille de TD 4 de Surfaces de Riemann. Diviseurs, Théorème de Riemann-Roch

Grégory Ginot

Comme d'habitude, toutes les surfaces seront supposées connexes, sauf mention du contraire. Si $D = \sum n_x \cdot x$ est un diviseur sur X, on notera $\mathcal{L}(D) = \{f \text{ méromorphe } / (f) + D \geq 0\}$ et $h^0(D) = \dim(\mathcal{L}(D))$.

Exercice 1 (Diviseurs sur $\mathbb{C}P^1$)**.**

1. Montrer que quels que soient $x \neq y \in \mathbb{C}P^1$, il existe une fonction méromorphe f sur $\mathbb{C}P^1$ de diviseur $(f) = x - y$.
2. Montrer deux diviseurs D, D' sur $\mathbb{C}P^1$ sont linéairement équivalents si et seulement si $\deg(D) = \deg(D')$.
3. Soit $D = 0 + 1$. Calculer l'espace $\mathcal{L}(D)$.
4. Montrer que $h^0(D) = \max(0, 1 + \deg(D))$ pour tout diviseur D sur $\mathbb{C}P^1$

Solution 1. rappelons que les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}P^1$ sont les fonctions rationnelles $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ où P, Q sont des polynômes. En particulier, en décomposant P et Q en irréductibles, la fonction f séscrit sous la forme $f(z) = \lambda \prod_{i=1}^{m} (z - x_i)^{n_i}$ où $n_i \in \mathbb{Z}$. Il est alors clair que x_i est un pôle d'ordre $-n_i$ si $n_i < 0$ et un zéro d'ordre n_i si n_i est positif. Réciproquement la connaissance des zéros, pôles et de leurs ordres détermine f au facteur multiplicatif $\lambda \in \mathbb{C}^*$ près. En particulier, on a donc $f(z) = \lambda \prod_{x \in \mathbb{C}P^1} (z - x)^{o_f(x)}$ où $o_f(x)$ désigne l'ordre (au sens des diviseurs) de la fonction méromophe f en x.

Le diviseur associé à f est donc $(-\sum_{i=1}^{m} n_i) \cdot \infty + \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot x_i$ car la fonction $f(z)$ a une partie principale de la forme $\lambda\, z^{(\sum_{i=1}^{m} n_i)}$ quand z tend vers l'infini.

1. Vu ce qui précède, il suffit de considérer la fonction $f(z) = \dfrac{z - x}{z - y}$.
2. On sait déjà (puisque, d'après le cours, c'est vrai pour toute surface de Riemann compacte) que si deux diviseurs sont linéairement équivalents, ils sont de même degré (c'est une conséquence immédiate du fait que le degré est un morphisme de groupe et que le degré d'un diviseur principal, c'est à dire d'une fonction méromorphe, est nul).

   Passons à la réciproque. Quitte à regarder $D - D'$ on est ramené à montrer que tout diviseur D de degré nul est principal. Soit alors $D = n_\infty \cdot \infty + n_1 \cdot x_1 + \cdots + n_k \cdot x_k$ un diviseur. Comme il est de degré 0, on a $n_\infty = -\sum_{i=1}^{k} n_i$. Il suit des préliminaires que $f(z) = \prod_{i=1}^{k} (z - x_i)^{n_i}$ a pour diviseur $(f) = D$.
3. Par définition $\mathcal{L}(0 + 1) = \{f \text{ méromorphe } / (f) + 0 + 1 \geq 0\}$ est l'ensemble des fonctions f holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0, 1\}$ et avec un pôle d'ordre *au plus* 1 en 0 et 1. Il y a donc 4 cas.
   - Si f est holomorphe partout, elle est constante car $\mathbb{C}P^1$ est compacte connexe.
   - Si f est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$, et a un pôle d'ordre 1 en 0, alors $f(z) = \dfrac{lambda + \mu z}{z}$ $(\lambda \neq 0)$ d'après la formule sur les diviseurs des fonctions rationnelles. En effet la somme des ordres $\sum_{x \in \mathbb{C}} o_f(x) \leq 0$ car l'infini n'est pas un pôle.

- Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}-\{1\}$, et a un pôle d'ordre 1 en 1, alors $f(z)=\dfrac{lambda+\mu z}{z-1}$ $(\lambda\neq-\mu)$ toujours d'après la formule sur les diviseurs des fonctions rationnelles.
- Enfin si f a exactement un pôle d'ordre 1 en 0 et 1, elle est de la forme $f(z)=\dfrac{a+bz+cz^2}{z(z-1)}$ où $a+bz+cz^2$ n'a pas de racines en $0,1$.

On voit alors, en réduisant tous els cas au même dénominateur, que $f(z)=\dfrac{P(z)}{z(z-1)}$ où $P\in\mathbb{C}_2[z]$ est un polynôme de degré plus petit que 2. par conséquent $\mathcal{L}(0+1)=\mathbb{C}_2[z]\dfrac{1}{z(z-1)}$ est un espace vectoriel de dimension 3, donc $h^0(0+1)=3$.

4. Rappelons que si $\deg(D)<0$, alors il n'y a que la fonction holomorphe nulle qui soit dans $\mathcal{L}(D)$. Si $\deg(D)=0$, soit f méromorphe telle que $(f)=D$. On a alors $\mathcal{L}(D)\cong\mathcal{L}(\emptyset)$ (où $\emptyset$ désigne le diviseur trivial $\sum_{x\in X}0\cdot x$ n'ayant aucun ordre différent de 0) via l'isomorphisme donné par $\mathcal{L}(D)\ni g\mapsto gf\in\mathcal{L}(\emptyset)$ car $(gf)=(g)+(f)$. On est donc ramené au cas de $\mathcal{L}(\emptyset)$ qui est l'ensemble des fonctions holomorphes, donc des fonctions constante donc de dimension 1.

   Passons au cas général. Soit $D=n_\infty\cdot\infty+n_1\cdot x_1+\cdots+n_k\cdot x_k=n_\infty\cdot\infty+\sum_{x\in\mathbb{C}}n_x\cdot x$ un diviseur de degré $0<\deg(D)=n_\infty+sumn_i$. Et soit g méromorphe. Alors en écrivant $g=\lambda\prod_{x\in\mathbb{C}P^1}(z-x)^{o_g(x)}=\left(\lambda\prod_{x\in\mathbb{C}}(z-x)^{o_g(x)-n_x}\right)\cdot\left(\prod_{x\in\mathbb{C}}(z-x)^{n_x}\right)$, on obtient que $g\in\mathcal{L}(D)$ si et seulement si pour tout $x\in\mathbb{C}$, $o_g(x)-n_x\geq0$ et $-\sum_{x\in\mathbb{C}}o_g(x)\geq n_\infty=\deg(D)-\sum_{x\in\mathbb{C}}n_x\cdot x$. Il suit que $\sum_{x\in\mathbb{C}}o_g(x)-n_x\leqslant\deg(D)$ et de plus, chaque $o_g(x)-n_x$ doit être positif. Donc $g(z)=p(z)\left(\prod_{x\in\mathbb{C}}(z-x)^{n_x}\right)$ où p est un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à $\deg(D)$. La réciproque est aisée. Il suit que $\mathcal{L}(D)=\mathbb{C}_{\deg(D)}[z]\left(\prod_{x\in\mathbb{C}}(z-x)^{n_x}\right)$ si $\deg(D)>0$ et donc $h^0(D)=\max(0,1+\deg(D))$.

   On pouvait aussi appliquer le théorème de Riemann-Roch (pour $n>0$). En effet, pour $n\geq0$, comme le genre de $\mathbb{C}P^1$ vaut 0, on a la formule

$$h^0(D)=1-0+\deg(D)+h^0(K-D)=1+n+h^0(K-D)=1+n$$

   car si $\deg(D)\geq-1$, $\deg(K-D)=\deg(K)-n=2-\deg(D)<0$, donc $h^0(K-D)=0$.

Exercice 2 (Diviseurs sur une courbe elliptique)**.** Soit $\Gamma=\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}$ un réseau sous forme normale de $\mathbb{C}$ et $E_\tau=\mathbb{C}/\Gamma$ la courbe ellliptique associée.

1. Calculer les diviseurs $(\mathcal{P}'(x))$ et $(\mathcal{P}(x))$ de la fonction de Weierstrass et de sa dérivée.
2. Pour tout $x\in E_\tau$ et $n\in\mathbb{Z}$, calculer $h^0(n\cdot x)$.
3. Calculer un diviseur canonique de E_τ.

Solution 2. 1. D'après le cours, $\mathcal{P}'$ a un pôle d'ordre 3 en $[0]$ et 3 racibnes distinctes d'ordre 1 en $[\tau]$, $[1/2]$ et $[(\tau+1)/2]$. De même $\mathcal{P}$ a un pôle d'ordre 2 en $[0]$ et deux racines $[z_0],[-z_0]$ d'ordre 1 (ou une racine d'ordre 2 si $[z_0]\in\{[\tau],[1/2],[(\tau+1)/2]\}$. Dans tous les cas, on obtient

$$(\mathcal{P}')-3\cdot[0]+[\tau]+[1/2]+[(\tau+1)/2],\qquad(\mathcal{P})=-2\cdot[0]+[z_0]+[-z_0].$$

2. Bien sur si $\deg(D)<0$, $\mathcal{L}(D)=\{0\}$, donc $h^0(n\cdot x)=0$ si $n<0$. Si $n=0$, on est ramen{e au cas des focntions holomorphes, donc $h^0(0\cdot x)=1$.

   Supposons $n=1$. Si f est méromorphe avec un unique pôle d'ordre 1 en x, alors, $f:E_\tau\to\mathbb{C}P^1$ est un isomorphisme puisque un revêtement à un seul feuillet. Ce qui est absurde. Donc $\mathcal{L}(1\cdot x)=\{$ fonctions constantes $\}\cong\mathbb{C}$ et donc $h^0(1\cdot x)=1$.

Montrons que $h^0(n\cdot x) = n$ si $n > 0$. On peut raisonne rpar récurrence et supposé le résultat démnotré pour $n-1$ avec $n > 1$. Si $n = 2i$ est pair, alors, il existe une fonction avec un unique pôle d'ordre $2i$ en x; par exemple la fonction $[z] \mapsto (\mathcal{P}(z-x))^i$ car $\mathcal{P}$ a un pôle d'ordre 2 en $[0]$. De même si si $n = 2i+1 = 2(i-1)+3$ avec $i \geq 1$, on a la fonction $[z] \mapsto (\mathcal{P}(z-x))^{i-1}\mathcal{P}'(z-x)$. Dans tous els cas on a exhibé une focntion *explicite* f avec un unique pôle d'ordre n en x. Soit $g \in \mathcal{L}(n\cdot x)$; on a $g - f$ a au plus un pôle , en x et d'ordre $\leq n-1$. Donc $g - f \in \mathcal{L}((n-1)\cdot x)$. Il suit que que $\mathcal{L}(n\cdot x) = \mathbb{C}\,f \oplus \mathcal{L}((n-1)\cdot x)$ et donc $h^0(n\cdot x) = 1 + n - 1 = n$ par récurrence. On peut remarquer, qu'on a en fait uen description explicite de cet espace de diviseurs en it{erant le raisonnement fait pour exhiber f.

On pouvait aussi raisonner en appliquant le théorème de Riemann-Roch (pour $n > 0$). En effet on a la formule

$$h^0(n\cdot x) = 1 - 1 + \deg(n\cdot x) + h^0(K - n\cdot x) = n + h^0(K - n\cdot x) = n$$

car si $n > 0$, $\deg(K - n\cdot x) = \deg(K) - n = -n < 0$, donc $h^0(K - n\cdot x) = 0$.

3. Il suffit de se rappeler qu'au voisinage de tout point $[z_0]$, une carte holomorphe est donnée par $z \mapsto [z+z_0]$ où z est dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Donc on a une forme différentielle méromorphe K de la forme dz au vosinage de tout point sans pôles ni racines. Il suit que $(K) = \sum_{x\in E_\tau} 0\cdot x$ est le diviseur nul (en particulier de degr{e 0 bien-sûr).

Exercice 3. Soit X une surface de Riemann compacte, de genre g.

1. En utilisant Riemann-Roch, montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur X avec un unique pôle d'ordre au plus $g+1$.
2. Soit $n \geq 2g$. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur X ayant un unique pôle et d'ordre exactement n.
3. Montrer que X est un revêtement ramifié de $\mathbb{C}P^1$ à au plus $g+1$-feuillets. En déduire que si X est de genre 0, X est isomorphe à $\mathbb{C}P^1$. Montrer que si $g = 1$, l'ordre du pôle ne peut pas être 1.
4. Soit $f : X \to X$ un isomorphisme différent de l'identité. Montrer que f a au plus $2g+2$ points fixes (on pourra utiliser la question précédente).

Solution 3. Soit K un diviseur canonique. C'est à dire le diviseur d'une forme mémormorphe *non-nulle* sur X, qui est de degré $2g-2$ (où g est le genre de X) d'après le cours. Rappelons que le théorème de Riemann-Roch s'énonce sous la forme

$$h^0(D) = \deg(D) + 1 - g + h^0(K - D)$$

Par compacité et connexité de X, on sait que $h^0(D) = \{0\}$ si $\deg(D) < 0$ (toute fonction holomorphe est de degré nul), et que si D est le diviseur nul $D = \emptyset = \sum_{x\in X} 0\cdot x$, on a $h^0(\emptyset) = 1$, car alors $\mathcal{L}(\emptyset) = \mathcal{M}(X)$ et que les seules fonctions holomorphes sur X sont les constantes.

1. Par définition, $\mathcal{L}(n\cdot x)$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur $X - \{x\}$, méromorphe au voisinage de x avec un pôle d'ordre *au plus* n en x. Il suffit donc de montrer que $h^0((g+1)\cdot x) \geq 2$ (c'est au moins 1 car $\mathcal{L}((g+1)\cdot x) \supset \mathbb{C} \cong \{f : X \to \mathbb{C}P^1 \text{ constante}\}$). On applique le théorème de Riemann-Roch au diviseur $D = (g+1)\cdot x$ de degré $g+1$:

$$h^0((g+1)\cdot x) = g + 1 + 1 - g + h^0(K - D) = 2 + h^0(K - D) \geq 2$$

puisque $h^0(K - D)$ est la dimension d'un esapce vectoriel, donc un entier positif ou nul.

2. Une fonction méromorphe sur X ayant un unique pôle et d'ordre exactement n (disons en un point $x \in X$) est, par définition, un élément de $\mathcal{L}(n\cdot x) - \mathcal{L}((n-1)\cdot x)$. On veut donc montrer que $h^0(n\cdot x) > h^0((n-1)\cdot x)$ (notons, bien que cela ne soit pas demandé, que $h^0(n\cdot x) = h^0((n-1)\cdot x)$ ou $h^0(n\cdot x) = h^0((n-1)\cdot x) + 1$, puisque si $f, g \in \mathcal{L}(n\cdot x) - \mathcal{L}((n-1)\cdot x)$, alors $f - g \in \mathcal{L}((n-1)\cdot x)$.) On applique Riemann-Roch aux diviseurs $n\cdot x$ (de degré n) et $(n-1)\cdot x$ (de degré $n-1$):

$$\begin{aligned} h^0(n\cdot x) &= n + 1 - g + h^0(K - n\cdot x) \\ h^0((n-1)\cdot x) &= n - g + h^0(K - (n-1)\cdot x). \end{aligned}$$

Mais, comme $\deg(K - (n-1)\cdot x) = \deg(K) - \deg((n-1)\cdot x) = 2g - 2 - n + 1 = 2g - n - 1 < 0$ par hypothèse. Donc $h^0(K - (n-1)\cdot x) = 0$ et de même, $h^0(K - n\cdot x) = 0$. Il suit alors des équations ci-dessus que $h^0(n\cdot x) = 1 + h^0((n-1)\cdot x)$.

3. D'après la question 1), il existe une fonction méromorphe f sur X, donc un revêtement ramifié $f : X \to \mathbb{C}P^1$, avec un unique pôle d'ordre au plus $g+1$. Par suite, le degré de f est égal à l'ordre de cet unique pôle, donc plus petit que $(g+1)$. Donc f est un revêtement ramifié de $\mathbb{C}P^1$ à au plus $(g+1)$-feuillets.

   En particulier, si X est de genre 0, X est un revêtement à un seul feuillet de $\mathbb{C}P^1$, donc un isomorphisme (voir la feuille de TD3). Plus généralement, si il existe une fonction méromorphe avec un unique pôle d'ordre 1 sur X, alors, cette fonction détermine un revêtement ramifié (puisque $\mathbb{C}P^1$ et X sont connexes, compactes) de $f : X \to \mathbb{C}P^1$ de degré l'ordre des pôles avec multiplicté, soit 1. Ainsi, f est injectif (donc un isomorphisme sur son image car f est un morphisme) et surjectif (par compacité de X et connexité de $\mathbb{C}P^1$) donc un isomorphisme. Il suit que le genre de X doit être 0. En particulier est différent de 1 !

   Remarque : ceci montre que deux points $x \neq y$ sur une surface de genre $g > 0$ ne sont jamais linéairement équivalents. En effet, sinon le diviseur $1 \cdot x - 1 \cdot y$ serait égal au diviseur (f) d'une fonction méromorphe f. Donc cette fonction aurait un unique pôle d'ordre 1 (en y) ce qui est absurde vu ce que l'on vient de démontrer.

4. Soit $f : X \to X$ un isomorphisme différent de l'identit'e. On choisit un point x_0 tel que $x_0 \neq f(x_0)$ et soit g une fonction méromorphe sur X avec un unique pôle, en x_0, d'ordre au plus $(g+1)$ (qui existe d'après la question 1.) La fonction $h(x) = g(x) - g(f(x))$ est méromorphe puisque f est un morphisme et g méromorphe. De plus, tout point fixe de f est un zéro de h. Or comme X est compact connexe, le nombre de zéros de f avec multiplicité est égal au nombres de pôles avec multiplicité. Il suffit donc de montrer qu'il y a au plus $2g+2$-pôles, comptés avec multiplicités.

   Mais un pôle de x est un point où $h(x) = \infty$ ce qui n'est possible que si $g(x) = \infty$ ou $g(f(x)) = \infty$. Mais comme le seul pôle de g est x_0 et que $g(x_0) \neq g(f(x_0))$, on en déduit qu'il y a 2 pôles x_0, $f^{-1}(x_0)$ chacun d'ordre au plus $(g+1)$ (car f est un isomorphisme). Il suit que l'ordre (avec multiplicité) total des pôles est au plus $2g+2$.

   Si f est un morphisme différent de l'identité et non-constant, c'est en particulier un revêtement ramifié (disons de degré d). Le raisonnement précédent assure alors que les pôles de $h(x)$ sont x_0 et les points de $f^{-1}(\{x_0\})$. Sachant que la somme des mutliplicités des points dans $f^{-1}(\{x_0\})$ est d, on obtient alors que h a au plus $(1+d)(g+1)$ pôles (avec multiplicité) et donc f au plus $(1+d)(g+1)$ points fixes.

   Remarque : 2g+2 peut être atteint, quel que soit le genre. Voir l'exercice 7 !

Exercice 4 (Formes différentielles holomorphes)**.** Soit X une surface de Riemann compacte, de genre g.

1. Montrer que l'espace vectoriel des formes différentielles holomorphes sur X est de dimension g.
2. Pour tout diviseur D, on note $\Omega(D) = \{\omega \in \Omega(X) \text{ méromorphe } / (\omega) \geq D\}$. Soit $K = (\nu)$ un diviseur canonique sur X. Montrer qu'il y a un isomorphisme $\mathcal{L}(K - D) \cong \Omega(D)$.
3. On veut montrer que pour tout $x \in X$, il existe une forme holomorphe $\omega \in \Omega(X)$ qui ne s'annule pas en x.
   i) Montrer que $h^0(x) = 1$.
   ii) Démontrer le résultat si $h^0(K - x) < h^0(K)$.
   iii) Conclure.

Solution 4. 1. Voir le cours. L'idée est que l'espace vectoriel des formes différentielles holomorphe, noté $\Omega(\emptyset)$ (où $\emptyset$ est le diviseur nul), est isomorphe à $\mathcal{L}(K)$. En effet, si ω est une forme différentielle holomorphe[1], et κ une forme différentielle méromorphe dont le diviseur $(\kappa) = K$. Alors l'application $\omega \mapsto \dfrac{\omega}{\kappa}$ est une application linéaire de $\Omega(\emptyset)$ dans les fonctions méromorphes $\mathcal{M}(X)$ sur X. En effet, dans des cartes locales, ω et κ sécrivent sous la forme $f_\omega(z)\,dz$ et $k(z)\,dz$ où f_ω est holomorphe et k méromorphe. Donc leur quotient est méromorphe, et de plus, bien défini globalement: en effet si on fait un changement de cartes $z_i \mapsto z_j$, les fonctions $f_{\omega,i}(z_i)$ et $k_i(z_i)$ sont changées en $f_{\omega,j}(z_j)\,\dfrac{dz_i}{dz_j}$ et $k_j(z_j)\,\dfrac{dz_i}{dz_j}$, et donc leur quotient définit bien une fonction compatible avec les changements de cartes (i.e. $k_i = k_j$ sur les intersections d'une carte $U_i \cap U_j$).

En résumé on a une application linéaire $\Omega(\emptyset) \to \mathcal{M}(X)$. Comme ω est holomorphe, on a $\left(\dfrac{\omega}{K}\right) = \left(\dfrac{f_\omega}{k}\right) = (f_\omega) - K$. D'où, comme $(f) \geq 0$, on a $\left(\dfrac{\omega}{K}\right) \geq -K$ et donc $\dfrac{\omega}{K} \in \mathcal{L}(K)$. On montre de même que l'application

[1] on ne suppose pas qu'il en existe de non-nulles bien sur

$f \mapsto f\,\kappa$ définit une application linéaire de $\mathcal{L}(K)$ dans les formes holomorphes qui est l'inverse de $\omega \mapsto \dfrac{\omega}{\kappa}$. Il suit que l'on a un isomorphisme linéaire $\Omega(\emptyset) \cong \mathcal{L}(K)$. En particulier, $h^0(K)$ est la dimension de l'espace des formes holomorphes.

Appliquons maintenant le théorème de Riemann-Roch:

$$h^0(K) = \deg(K) + 1 - g + h^0(\emptyset) = 2g - 2 + 1 - g + 1 = g.$$

Remarque : il n'y a donc pas de formes différentielles holomorphes (non identiquement nulles) sur $\mathbb{C}P^1$.

2. On applique la méthode de la question précédente: si $\omega \in \Omega(D)$, alors $\dfrac{\omega}{K}$ est une fonction méromorphe et $\left(\dfrac{\omega}{K}\right) = (\omega) - K \geq D - K$ et donc $\dfrac{\omega}{K} \in \mathcal{L}(K - D)$. On en déduit comme précédemment que l'application $\omega \mapsto \dfrac{\omega}{K}$ est un isomorphisme linéaire de $\Omega(D)$ sur $\mathcal{L}(K - D)$.

3. Puisque $g \geq 1$, il n'y a aucune fonction méromorphe avec un unique pôle simple (d'après la remarque de l'exercice 3.3).

   i) Comme il n'y a aucune fonction avec un unique pôle simple dans X, $\mathcal{L}(x) = \prime \cdot \S$, c'est à dire les fonctions holomorphes (donc constantes sur X compact connexe). Par conséquent, $h^0(x) = 1$.

   ii) Par la question précédente, une forme holomorphe avec un zéro en x est un élément de $\Omega(1 \cdot x)$. Une forme holomorphe qui ne s'annule pas en x est donc un élément de $\Omega(\emptyset) = \Omega(0 \cdot x) - \Omega(1 \cdot x)$. On cherche donc à montrer que $\dim(\Omega(\emptyset)) > \dim(\Omega(1 \cdot x))$, ce qui est équivalent, vu la question précédente, à $h^0(K - x) < h^0(K)$.

   iii) On utilise Riemann-Roch:

   $$\begin{aligned} h^0(K) &= \deg(K) + 1 - g + h^0(K - K) = g \\ h^0(k - x) &= \deg(K - x) + 1 - g + h^0(K - k + x) = 2g - 3 + 1 - g + h^0(x) = g - 1 \end{aligned}$$

   car $h^0(x) = 1$ par le i). Par conséquent, $h^0(K - x) < h^0(K)$ et le résultat cherché suit d'après ii).

Exercice 5. Soit X la surface de Riemann associée à l'équation algébrique $w^2 = (z - a_1) \cdots (z - a_{2g+2})$ au dessus de $\mathbb{C}P^1$.

1. Rappeler pourquoi X est de genre g et pourquoi les fonctions $(w, z) \mapsto z$ et $(w, z) \mapsto w$ s'étendent en des fonctions méromorphes $z : X \to \mathbb{C}P^1$ et $w : X \to \mathbb{C}P^1$ sur X. Quel est le cardinal de $z^{-1}(a_i)$? Celui de $z^{-1}(\infty)$?

2. On note (par un abus de notation) $a_i := z^{-1}(a_i)$ et $p_1, p_2 = z^{-1}(\infty)$. Calculer les diviseurs (z), (w)?

3. Montrer que les formes différentielles $\dfrac{z^i\,d\,z}{w}$ $(0 \leq i \leq g - 1)$ sont holomorphes sur X. Quels sont leurs diviseurs ?

4. Montrer que les formes différentielles de la question **3.** sont une base de l'espace vectoriel des formes différentielles holomorphes.

Solution 5. On note $P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_{2g+2})$ qui est à racines simples.

1. D'après l'exercice 6 de la feuille de TD 3 (impérativement le reprendre si vous ne savez plus le faire), la surface de Riemann compacte connexe X associée à la courbe $w^2 - P(z) = 0$ au dessus de $\mathbb{C}P^1$ (via $(z, w) \mapsto z$) est de genre g. Par unicité, il s'agit aussi de celle associée à la courbe au dessus de $\mathbb{C}P^1$ via $(z, w) \mapsto w$. En particulier, les fonctions $z : X \to \mathbb{C}P^1$ et $w : X \to \mathbb{C}P^1$ sont des morphismes de surfaces de Riemann.

   On a aussi vu dans l'exercice 6 de la feuille de TD 3 que z est un revêtement ramifié à 2 feuillets et qu'il n'est ramifié qu'en les a_i; en particulier $z^{-1}(a_i) = (a_i, 0) \in \mathbb{C}^2 \subset X$. De plus, l'infini n'est pas un point de branchement de z et donc il y a 2 points à l'infini notés p_1, p_2 (pour être cohérent avec la question suivante); i.e. $z^{-1}(\infty) = \{p_1 \neq p_2\}$.

2. Rappelons que par le théorème des fonctions implicites holomorphes (encore une fois reprendre l'exercice 6 de la feuille de TD 3 et les exercices de la feuille de TD 2), au voisinage d'un point non-ramifié, on peut prendre z comme coordonnée locale et u'au voisinage d'un point de ramification on peut prendre w.

   Au voisinage d'un point $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ avec $z \in \mathbb{C} - \{a_1, \ldots, a_{2g+2}\}$, on peut donc écrire le morphisme z sous la forme z qui n'a de 0 qu'en, $(z, w) = (0, \pm\sqrt{a_1 \cdots a2g+2})$ (d'ordre 1); sauf si l'un des a_i est nul.

   Au voisinage d'un point $(z, w) = (a_i, 0)$, la fonction $w \mapsto (z(w), w) \mapsto z(w)$ ne s'annule évidemment pas, sauf si l'un des a_i est nul, auquel cas on a un zéro $(0, 0)$ d'ordre 2 pour z.

   Il reste à considérer les points à l'infini. Puisque ils ne sont pas ramifiés, ce sont des pôles d'ordre 1. Donc

$$(z) = 1 \cdot (0, \sqrt{a_1 \cdots a2g+2}) + 1 \cdot (0, -\sqrt{a_1 \cdots a2g+2}) - 1 \cdot p_1 - 1 \cdot p_2.$$

   On notera que cette expression a du sens (et convient) même si un des a_i est nul.

   Pour calculer les diviseurs de w, on procède de même. On note que w n'est nul que si $z = a_1 \ldots a_{2g+2}$. Au voisinage de chacun de ces points on a une carte locale donnée par $w \mapsto (f(w), w)$ et donc l'application w a un zéro d'ordre simple en $(a_i, 0)$ pour tout $i = 1 \ldots 2g+2$. Il reste à déterminer les pôles. Ces derniers correspondent à p_1 et p_2 et pour des raisons de symétrie, ils doivent avoir le même ordre et la somme desordres doit être de $2g+2$. On en déduit que chacun est d'ordre $g+1$.

   Remarque : on peut bien sur, retrouver l'ordre des pôles en p_1, p_2 par le calcul. Par exemple, en considérant un lacet $w = R\exp(it), t \in [0, frm{-}e\pi]$ et son relèvement passant par $z_0 \in w^{-1}(R)$. Alors, en écrivant $P(z) = z^{2g+2}h(1/z)$ où h est holomorphe non-nulle en 0, puis en écrivant h sous la forme f^{2g+2} avec f holomorphe, on obtient un chemin $(z(t), w(t))$ dans X tel que $z(t)f(t) = \sqrt[g+1]{R}\exp\left(\frac{it}{g+1}\right)$. D'où $z(2\pi) = \exp\left(\frac{2i\pi}{g+1}\right) z(0)$ et il suit que tout point à l'infini est ramifié d'ordre $g+1$.

   Finalement, on a obtenu:

$$(w) = a_1 + a_2 + \cdots a_{2g+2} - (g+1) \cdot p_1 - (g+1) \cdot p_2.$$

3. La formule $\frac{z^i}{w}\,dz$ définit une forme différentielle au voisinage de tout point $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2 - \{a_1, \ldots, a_{2g+2}\} \subset X$, car au voisinage d'un tel point une carte est donnée par $z \mapsto (z, \sqrt{P(z)})$ où on a choisi une détermination holomorphe de la racine carrée[2] telle que $\sqrt{P(z_0)} = w_0$. Comme $\sqrt{P(z)}$ est holomorphe et ne s'annule pas, la fonction $\frac{z^i}{w} = \frac{z^i}{\sqrt{P(z)}}$ est holomorphe dans cette carte.

   Il faut donc maintenant montrer que l'on peut étendre cette forme en une forme holomorphe sur toute la surface X. Si on note $z_i : D_i \to U_i \subset X$ des cartes locales, une forme différentielle est la donée de formes locales $f_i\,dz_i$ telles que $f_j\,dz_j = f_i\,dz_i$[3]. Lorsque l'on a une courbe non-singulière $Q(w, z) = 0$, une méthode pour étendre la forme holomorphe, définie sur des cartes où on a pris z comme variable sur des cartes où on a w comme variable, consiste à dériver l'équation de la courbe $Q(w, z) = 0$. Ici, de $w^2 = P(z)$ on déduit $2w\,dw = P'(z)\,dz$ et donc $\frac{dz}{w} = \frac{2\,dw}{P'(z)}$.

   On en déduit que, au voisinage des points $a_i \in X$ (pour lesquels une carte locale est donnée par $w \mapsto (g(w), w)$ où w est dans un voisinage de 0 et g holomorphe avec $g(0) = a_i$), on peut étendre la forme $\frac{z^i\,dz}{w}$ par $\frac{2z(w)^i\,dw}{P'(z(w)))} = \frac{2g(w)^i\,dw}{P'(g(w))}$. Cette forme différentielle est compatible avec les changements de carte par construction, donc définit une forme sur tout $\mathbb{C}^2 \subset X$. Il faut encore montrer qu'elle est holomorphe au voisinage des a_i. Mais comme P' est un polynôme qui ne s'annule pas en a_i et que g est holomorphe et vaut a_i pour $w = 0$, $P'(g)$ est holormophe non-nulle au voisinage de 0, donc $\frac{g^i}{P'(g)}$ est holomorphe au voisinage de 0.

   Jusqu'à présent le raisonnement effectué est vrai pour tout entier $i \geq 0$. Il faut maintenant étendre le résultat au voisinage des deux points à l'infini p_1, p_2. On a vu que z n'est pas ramifié en p_1 et p_2

[2] dans un voisinage simplement connexe de z_0 dans $\mathbb{C} - \{a_1, \ldots a_{2g+2}\}$

[3] ce qui veut dire que l'on a $f_j(\phi_{i,j}(z_i))\frac{\partial z_j}{\partial z_i} = f_i(z_i)$ où $\phi_{i,j} : z_i^{-1}(U_i \cap U_j) \to z_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ est le changement de cartes

(précisément parcequ'il y a deux points). Donc, z définit un isomorphisme local (car z est un morphisme de surfaces de Riemann) entre un voisinage de $p_1 \in X$ et $\infty \in \mathbb{C}P^1$. Donc une carte locale en p_1 est donnée par z. Comme une carte au voisinage de l'infini dans $\mathbb{C}P^1$ est donné par $u \mapsto z = \dfrac{1}{u}$ (où $u \in C$), on obtient une carte locale au voisinage de p_1 donnée par $u \mapsto \left(\dfrac{1}{u}, \sqrt{P(\dfrac{1}{u})}\right)$. La forme $\dfrac{z^i\,dz}{w(z)}$ devient

$$\frac{\frac{1}{u^i}}{w(\frac{1}{u})}\, d\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{-1}{u^{i+2}\, w(\frac{1}{u})}\, du.$$

Comme $w(z)$ est holomorphe au voisinage de l'infini, il en est de même de $w(\dfrac{1}{u})$.

Il faut maintenant vérifier quand $u \mapsto \dfrac{-1}{u^{i+2}\, w(\frac{1}{u})}$ est holomorphe au voisinage de $u = 0$. Pour cela on étudie le comportement de $w(z)$ quand $z \mapsto \infty$. De l'équation $w^2 = P(z)$ on déduit que $w^2 = z^{2g+2}\, h^2(1/z)$ où h est holomorphe, non-nulle au voisinage de 0 (cf l'exercice 6 de la feuille de TD 3) et $w = z^{g+1}\, h(1/z)$. Par conséquent, on a

$$u^{i+2}\, w\left(\frac{1}{u}\right) = u^{i+1-g}\, h(u)$$

La fonction $u \mapsto u^{i+1-g}\, h(u)$ est holomorphe (ce n'est pas le point délicat) et ne s'annule pas dans un voisinage de $u = 0$ si $0 \leq i \leq g-1$ (c'est ici que la condition sur i intervient).

Finalement, on a montré que, pour $i \in \{0, \dots, g-1\}$, la forme différentielle $\dfrac{z^i\,dz}{w}$ sétend en une forme différentiele holomorphe sur X.

Pour obtenir les diviseurs d'une forme holomorphe ω, il faut, pour tout point $x \in X$, calculer l'ordre de ω en x en prenant l'expression de ω dans une carte locale en x. On sait déjà que le degré du diviseur d'une telle forme est $2g-2$ (comme pour toute forme méromorphe). On sait aussi, qu'étant holomorphe, elle n'a pas de pôles. On doit donc trouver $2g-2$ zéros (avec multiplicités).

On reprend les calculs précédents, dans une carte au voisinage de $(z, w) \in \mathbb{C}^2 - \{a_1, \dots, a_{2g+2}\}$, on a $\dfrac{z^i}{w}$ est holomorphe sans pôles et n'a de zéro que pour $z = 0$, c'est à dire les deux points $(0, \sqrt{P(0)})$, $(0, -\sqrt{P(0)})$ d'ordre i (sauf si $0 \in \{a_1, \dots, a_{2g+2}\}$).

Au voisinage d'un point a_i, la forme sécrit $\dfrac{2g(w)^i\,dw}{P'(g(w))}$ (voir les calculs ci-dessus) avec $g(0) = a_i$. Cette forme n'a pas de zéros sauf si l'un des $a_i = 0$, auquel cas on a un pôle d'ordre $2i$, car g est ramifiée d'ordre 2 en 0 (puisque a_i est un point de ramification).

Au voisinage de p_1, p_2, la forme sécrit $\dfrac{-1}{u^{i+2}\, w(\frac{1}{u})}\, du$ et a donc un zéro d'ordre $g-i-1$ en p_1 et p_2.

Il suit que

$$\left(\frac{z^i\,dz}{w}\right) = i \cdot (0, \sqrt{P(0)}) + i \cdot (0, -\sqrt{P(0)}) + (g-1-i) \cdot p_1 + (g-1-i) \cdot p_2.$$

On remarquera que l'expression ci-dessus est correcte même si $0 \in \{a_1, \dots, a_{2g+2}\}$.

4. On sait par l'exercice 3 que l'espace vectoriel des formes différentielles holomorphes ets de deimension g. Il suffit donc de montrer que les formes $\dfrac{z^i\,dz}{w}$ sont linéairement indépendantes; autrement dit que pour toute combinaison linéaire nulle $\displaystyle\sum_{i=1}^{g} \lambda_i \frac{z^i\,dz}{w} = 0$ on a $\lambda_1 = \dots = \lambda_g = 0$. Il suffit de vérifier cela dans une carte locale. Le résultat découle alors trivialement du fait que les monômes de degré 2 à 2 distincts z^i sont linéairement indépendants.

Exercice 6 (Surfaces de genre 2)**.** Soit X une surface de Riemann de genre 2.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, il existe une fonction méromorphe avec un seul pôle d'ordre au plus 3 (et au moins 1) en x.

2. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe avec un seul pôle d'ordre 2 en x si et seulement si $h^0(2x) > 1$. Un tel point s'appelle un point de Weierstrass.

3. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe avec un seul pôle d'ordre 2 en x si et seulement si il existe une forme différentielle holomorphe avec un zéro d'ordre au moins 2 en x.

4. Montrer qu'il existe deux formes holomorphes $f_1(z)dz$ et $f_2(z)dz$[4] telles que x est un point de Weierstrass si et seulement si $W(z) = f_1(z)f_2'(z) - f_1'(z)f_2(z)$ s'annule en x.

5. Quelle est l'équation satisfaite par $W(z)$ lorsqu'on change de carte locale ? Montrer que W définit une section du fibré canonique à la puissance 3, $(T^*X)^{\otimes 3}$ dont les points de Weierstrass sont les zéros.

6. Montrer que W admet exactement 6 points de Weierstrass avec multiplicités (la multiplicité étant l'ordre du zéro de W).

Solution 6. *Remarque :* Dans les exercices 1,2 ou 3 on ne s'est intéressé qu'à des résultats sur l'existence de fonctions méromorphes avec certains pôles qui ne dépendaient pas des points considérés. Par exemple $h^0(n \cdot x)$ est indépendant de x sur une courbe elliptique (ou $\mathbb{C}P^1$). Ceci n'est pas vrai pour des courbes de genre plus grand en général comme le montre cet exercice.

Puisque X est de genre 2, le degré d'un diviseur canonique est de 2.

1. Une fonction méromorphe avec un unique pôle d'ordre au plus n en x est un élément de $\mathcal{L}(nx)$, de sorte qu'une fonction méromorphe. Il suffit donc de montrer que $h^0(3 \cdot x) > 1$ (car les fonctions holomorphes sont les constantes et forment donc un espace de dimension 1). Pour cela, on applique le théorème de Riemann-Roch (ou le résultat de l'exercice 3.1)):
$$h^0(3 \cdot x) \quad = \quad 3 + 1 - 2 + h^0(K - 3 \cdot x) = 2$$
car $\deg(K - 3 \cdot x) < 0$, donc $h^0(K - 3 \cdot x) = 0$.

2. Il est clair que $\mathcal{L}(2 \cdot x) \supset \mathcal{L}(x) \supset \mathcal{L}(\emptyset) = \{f \text{ holomorphe}\} \cong \mathbb{C}$. On a vu dans l'exercice 3, que $\mathcal{L}(x)$ est réduit aux constantes, c'est à dire qu'il n'y a pas de fonctions méromorphes avec *exactement* un pôle simple. Par conséquent, $h^0(2 \cdot x) > 1$ si et seulement si il existe une fonction méromorphe avec un unique pôle en x, d'ordre *exactement* 2.

   Notons que, dans ce cas, $h^0(2x) = 2$ (car $h^0(2 \cdot x) \leq h^0(3 \cdot x) = 2$) et il n'y a alors aucune fonction méromorphe en x avec un pôle d'ordre exactement 3.

3. On applique Riemann-Roch au diviseur $D = 2 \cdot x$:
$$h^0(2 \cdot x) = 2 + 1 - 2 + h^0(K - 2 \cdot x) = 1 + h^0(K - 2 \cdot x).$$
Par conséquent, $h^0(2 \cdot x) > 1$ si et seulement si $h^0(K - 2 \cdot x) > 0$. Or, d'après l'exercice 4.2),

   $\mathcal{L}(K - 2 \cdot x) \cong \Omega(2 \cdot x) = \{\omega \text{ méromorphe } / (\omega) \geq 2 \cdot x\} = \{\omega \text{ holomorphe avec un zéro d'ordre au moins } 2\}$

   ce qui démontre le résultat demandé.

4. Soient ω_1, ω_2 une base de l'espace des formes différentielles holomorphes sur X (qui est de dimension 2 d'après le cours et l'exercice 4). Alors toute forme $\beta \neq 0$ s'écrit $a\omega_1 + b\omega_2$ où $a, b \in \mathbb{C}$, nous tous les deux-nuls. Si on écrit $\omega_1 = f_1(z)\,dz$ et $\omega_2 = f_2(z)\,dz$ en coordonnées locales, alors $\beta = \big(af_1(z) + bf_2(z)\big)$. Pour tout $x \in X$, la forme β a un zéro d'ordre au moins 2 en x, si $\big(af_1(x) + bf_2(x)\big) = 0 = \big(af_1'(x) + bf_2'(x)\big)$. En d'autres termes il existe une forme holomorphe avec un zéro d'ordre au moins 2 en x si et seulement si il existe un vecteur non-nul $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ qui est dans le noyau de l'application linéaire $\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}$. Donc ssi cette forme n'est pas inversible, c'est à dire ssi $\det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix} = f_1(x)f_2'(x) - f_1'(x)f_2(x) = 0$.

   On en déduit que $W(z) = f_1(z)f_2'(z) - f_1'(z)f_2(z)$ (où $\omega_1 = f_1(z)\,dz$, $\omega_2 = f_2(z)\,dz$ en coordonnées locales) convient.

[4] ces formes sont données en coordonnées locales bien entendu.

5. Soit $f_{1,i}\,dz_i$, $f_{1,j}\,dz_j$ deux formes locales de ω_1 (disons définies dans des cartes U_i, U_j). Alors sur l'intersection $U_i \cap U_j$, on a la formule de changement de cartes $f_{1,i}(z) = \dfrac{\partial z_j}{\partial z_i} f_{1,j}(z)$. En dérivant $f_{1,i}(z)\,dz_i = f_{2,j}(z)\,dz_j$, on obtient $f'_{1,i}(z) = \left(\dfrac{\partial z_j}{\partial z_i}\right)^2 f'_{1,j}(z) - \dfrac{\partial^2 z_j}{\partial z_i^2} f_{1,j}(z)$. On a une formule identique pour f_2 et par conséquent, on obtient la formule de changement de cartes suivantes pour W:

$$W(z_i) = \left(\frac{\partial z_j}{\partial z_i}\right)^3 W(z_j).$$

Or par définition du fibré canonique[5] T^*X (voir le cours), une section de ce dernier est donnée par n'importe quelle fonction $(h_i)_{i\in I}$ dont les coordonnées locales sont holomorphes et vérifient $h_i = \dfrac{\partial z_j}{\partial z_i} h_j$. Donc, une section du fibré canonique à la puissance 3, $(T^*X)^{\otimes 3}$ est donnée par une fonction $(h_i)_{i\in I}$ dont les coordonnées locales sont holomorphes et vérifient $h_i = \left(\dfrac{\partial z_j}{\partial z_i}\right)^3 h_j$.

Il suit de ci-dessus que W définit précisément une telle fonction, donc une section de $(T^*X)^{\otimes 3}$, qui s'annulle en les points de Weierstrass (puisque c'est le cas de W d'après la question précédente).

6. On vient de montrer que W est une section de $(T^*X)^{\otimes 3}$ et qu'en particulier, W détermine une 3-*forme différentielle holomorphe*. Par une 3-forme différentielle on η entend la donnée d'expressions locales $g(z)\,(dz)^3$, avec g holomorphe, qui sont invariante par changement de cartes: autrement dit que $g(z_i)$ est transformé en $g(z_j)\left(\dfrac{\partial z_j}{\partial z_i}\right)^3$ lors d'un changement de coordonnées locales de z_i à z_j. On définit de même des 3-formes différentielles méromorphes.

   A une 3-forme différentielle (méromorphe ou holomorphe), on associe un diviseur de manière analogue à ce qu'on fait pour els formes différentielles usuelles. C'est à dire que $(\eta) = \sum_{x\in X} o_\eta(x)\cdot x$ où $o_\eta(x) = o_f(x)$ est l'ordre de f en x où on a écrit $\eta = f(z)\,(dz)^3$ dans une carte locale en x. Que cette définition soit indépendante du choix des cartes découle (comme pour les formes différentielles) du fait que les changements de cartes $\dfrac{\partial z_j}{\partial z_i}$ n'ont ni pôles ni zéros.

   On note $W\,(dz)^3$ la 3-forme associée à W. Montrons que $\deg(W\,(dz)^3) = 6$. Fixons $\omega \in \Omega(X)$ une forme différentielle holomorphe *non-nulle* sur X; localement on a $\omega = f_\omega(z)\,dz$. Alors $\omega^3 = (f_\omega(z))^3\,(dz)^3$ est une 3-forme différentielle holomorphe. De plus le quotient $\dfrac{W\,(dz)^3}{\omega^3} = \dfrac{W(z)}{(f_\omega(z))^3}$ est une fonction méromorphe, donc de degré nul (on suit les idées déjà utilisées dans l'exercice 4). Et de plus $\left(\dfrac{W\,(dz)^3}{\omega^3}\right) = (W\,(dz)^3) - (\omega^3)$ (ceci se calcule localement, donc on est ramené au cas des fonctions). Déterminons le degré de ω^3. Comme localement $\omega^3 = (f_\omega(z))^3\,(dz)^3$, que $\deg(f_\omega(z)\,dz) = 2$ (car $\omega = f_\omega\,dz$ est une forme holomorphe sur X de genre 2) et donc $\deg(f_\omega(z))^3\,(dz)^3 = 6$ (car $o_{f^3}(x) = 3o_f(x)$ pour toute fonction méromorphe). Il suit que $W(z)\,(dz)^3$ est aussi de degré 6.

   Comme la 3-forme différentielle $W(z)\,(dz)^3$ est *holomorphe*, elle n'a aps de pôles, et puisqu'elle est de de degré 6, elle a donc 6 zéros avec multiplicité. Ainsi il y a exactement 6 ppoints de Weierstrass (comptés avec multiplicités). En particulier il y en a au moins 1 !

   Remarque : La technique employée ici pour calculer le degré de $W(z)\,(dz)^3$ se généralise sans difficultés pour montrer que le degré de toute n-forme différentielle holomorphe sur une surface de genre g est $n(2g-2)$.

Exercice 7 (Courbes hyperelliptiques)**.** Une surface de Riemann est dîte hyperelliptique s'il elle est un revêtement ramifié de degré 2 de $\mathbb{C}P^1$.

1. Montrer que toute surface de genre $\leqslant 1$[6] est hyperelliptique. Exhiber "explicitement" un revêtement ramifié d'ordre 2 de la surface.

[5] qui est aussi le fibré holomorphe cotangent par définition

[6] en particulier toute courbe elliptique

2. Quel que soit $g \in \mathbb{N}$, exhiber une surface hyperelliptique de genre g.
3. Montrer qu'une surface est hyperelliptique si et seulement si il existe un divisieur $D \geq 0$ de degré 2 tel que $h^0(D) \geq 2$. En déduire que toute surface de genre 2 est hyperelliptique.
4. Montrer qu'il existe une involution holomorphe $\tau : X \to X$ [7]
5. Montrer que X, de genre g, est hyperelliptique si et seulement si il existe une involution holomorphe avec exactement $2g + 2$ points fixes.

Solution 7.

1. Si $g = 0$, il suffit de considérer $z \mapsto z^2$. Pour $g = 1$, soit $\mathcal{P}$ la fonction méromorphe de Weierstrass. Elle a un unique pôle d'ordre 2, donc elle définit un revêtement ramifié de degré 2 $\mathcal{P} : X \to \mathbb{C}P^1$. Si la courbe elliptique est donnée par une équation de la forme $y^2 = p(x)$, alors un tel revêtement est aussi donné par $y \mapsto -y$.
2. On a vu dans l'exercice 5 que la surface de Riemann associée à l'équation algébrique $w^2 = (z - a_1) \cdots (z - a_{2g+2})$ au dessus de $\mathbb{C}P^1$ est un revêtement ramifié de degré 2 de $\mathbb{C}P^1$ et est de genre g.
3. Si $f : X \to \mathbb{C}P^1$ est un revêtement ramifié de degré 2, alors f est une fonction méromorphe de degré 2, donc elle admet deux poles p_1, p_2 (avec multiplictés). Soit alors D le diviseur $p_1 + p_2$. Il est clair que $F \in \mathcal{L}(D)$, donc $h^0(D) > 1$ et que $D \geq 0$. Réciproquement, un tel diviseur est nécéssairement de la forme $q_1 + q_2$ (éventuellement $q_1 = q_2$). Il suit qu'une fonction non constante $f \in \mathcal{L}(D)$ est soit ramifiée de degré 2, soit a un unique pôle simple ce qui est absurde si $g \geq 1$. Enfin si $g = 0$, $h^0(D) = 2$ si $\deg(D) = 2$ d'après l'exercice 1. L'équivalence ets donc démontrée et le résultat de l'exercice 5 nous donne l'existence d'un tel diviseur pour toute surface de genre 2. On peut aussi traiter ce dernier cas plus facilement. En effet, soit ω_1, ω_2 une base de l'espace des formes différentielles holomorphes. Comme cet espace est de dimension 2, on peut trouver une forme holomorphe non-nul dont le diviseur est donc positif. On peut donc supposer que le diviseur canonique est > 0. Mais alors $h^0(K) = 2$ ce qui conlut.
4. Soit $\pi : X \to \mathbb{C}P^1$, ramifié d'ordre 2. Pour tout x non-ramifié, $\pi^{-1}(\pi_x(x)) = \{x \neq y\}$ (il y a deux points distincts). On définit $\tau : X \to X$ par $\tau(x) = y$ si x est non-ramifiée et $\tau(x) = x$ si x est ramifié. Pour vérifier que cette application est holomorphe, on le fait en utilisant les cartes locales au voisinage des points non-ramifiés et la forme locale $\pi(z) = z^2$ au voisinage d'un point de ramification. Il est alors clair que τ est un isomorphisme qui vérifie $\tau^2 = id$.

   Remarque : dans le cas d'une courbe associée à l'équation $w^2 = (z - a_1) \cdots (z - a_{2g+2})$ et $\pi(z, w) = z$; l'involution associée est l'application $(z, w) \mapsto (z, -w)$ qui a bien $2g + 2$-points fixes en les points a_i.
5. Soit $p : X \to \mathbb{C}P^1$ un revêtement ramifié de degré 2 et τ l'involution qui lui est associée comme dans la question précédente. Par la formule de Riemann-Hurwitz, comme tout point est soit ramifié d'ordre 2 soit non-ramifié, on trouve $2(1 - g) = 2 \cdot 2 - n_p$ où n_p est le nombre de points de ramification de p. D'où $n_p = 2g + 2$. Comme ces points sont exactement les points fixes de τ, on a bien trouvé $2g + 2$-points fixes.

   Réciproquement, soit $\tau : X \to X$ une involution avec $2g + 2$-points fixes (notés $\{a_1, \dots, a_{2g+2}\}$). On note $Y = X/\langle\tau\rangle$ le quotient de X par le groupe $\langle\tau\rangle = \{id, \tau\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En dehors des points fixes, la projection $\pi : X - \{a_1, \dots, a_{2g+2}\} \to (X - \{a_1, \dots, a_{2g+2}\})/\langle\tau\rangle$ est un revêtement à 2 feuillets.

   On vérifie que la projection $p : X \to Y$ est ouverte et que Y est séparé (ce qui découle du fait que τ est un isomorphisme, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ discret, fini). Au voisinage d'un point non-ramifié, p est un homéomorphisme local et on peut munir un tel point d'une carte locale holomorphe induite par celle de X (comme pour tout revêtement, cf le cours et la feuille de TD 1). Au voisinage d'un point de ramification x_0, on fixe une carte locale (donnée par des corrdonnées z avec z dans un voisinage de 0) telle que τ s'écrive $z \mapsto \tau(z) = -z$ localement. Ceci est toujours possible puisque τ est holomorphe et involutive (donc $\tau(z)^2 = z$, c'est à dire $\tau(z) = \pm z$) et que les points fixes de τ forment un sous-ensemble discret (ils sont en nombre finis). Alors, on munit le point $p(x_0) \in Y$ de la carte locale $z^2 \circ p^{-1}$ qui est bien défini et un homéomorphisme localement. On vérifie que ces cartes sur Y induisent un atlas holomorphe et que $p : X \to Y$ est un morphisme de surfaces de Riemann. En particulier Y est une surface de Riemann compacte. On applique alors la formule de Riemann Hurwitz et on trouve que Y est de genre 0, donc isomorphe à $\mathbb{C}P^1$ par le théorème d'uniformisation. Il suit alors que $p : X \to Y \cong \mathbb{C}P^1$ est un morphisme ramifié de degré 2.

   Remarque : le résultat ci-dessus montre en fait que toute surface de Riemann hyperlelliptique est la surface de Riemann associée à une équation alagébrique de la forme $w^2 = (z - a_1) \cdots (z - a_{2g+2})$ au dessus de

[7] *i.e.* $\tau^2 = \mathrm{Id}$

$\mathbb{C}P^1$. De plus si le genre est $g = 2$, les points de Weierstrass sont précisément les 6 points de ramification $a_1, \ldots, a_{2g+2}$.