Corrigé du Devoir de Surfaces de Riemann.

Grégory Ginot

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto f(z) = (z^2+1)^2$.

1) Montrer que f est un revêtement holomorphe ramifié. On note R l'image par f des points de ramification de f et $Z = f^{-1}(R)$.

2) Montrer que le revêtement $f : \mathbb{C} - Z \to \mathbb{C} - R$ est non-régulier (c'est à dire non-galoisien). Quel est le groupe des automorphismes de ce revêtement ?

Solution 1. 1. La fonction f est un polynôme, donc est holomorphe. Ses points de ramification sont alors les points en lesquels la dérivée $f'(z)$ s'annule[1]. Or $f'(z) = 4z(z^2+1)$. Donc les points de ramification sont les points $z = 0, i, -i$. D'où $R = f(\{0, i, -i\}) = \{1, 0\}$. On a alors $Z = \{i, -i, 0, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$.

La restriction $f : \mathbb{C} - Z \to \mathbb{C} - R$ est un homéomorphisme local, surjectif à fibres de cardinal 4 (car $f(z) - \lambda$ est alors un polynôme de degré 4 à racines simples, donc avec 4 solutoins distinctes) avec Z discret et $\mathbb{C} - Z$ connexe. C'est en particulier un revêtement ramifié de degré 4 (voir le cours ou les TDs de revêtements; ou bien utiliser l'existence de sections locales holomorphes par le théorème des fonctions implicites pour construire des sections). Il est holomorphe, puisque f est holomorphe.

2. Soit $\phi : \mathbb{C} - Z \to \mathbb{C} - Z$ un morphisme de revêtements; c'est à dire que $f(\phi(z)) = f(z)$ pour tout z et ϕ est continue. On a donc $\big((\phi(z))^2+1\big)^2 = (z^2+1)^2$ c'est à dire que $(\phi(z))^2+1 = \epsilon(z^2+1)$ où, par connexité (et non-annulation de z^2+1) de $\mathbb{C} - Z$, le signe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ est constant. Si $\epsilon = 1$, alors $\phi(z) = \nu z$ avec $\nu \in \{-1, 1\}$ constant. Il est clair qu'une telle fonction est un morphisme de revêtement. Si $\epsilon = -1$, alors $(\phi(z))^2 = -(z^2+2)$ et donc ϕ doit être une détermination *continue globale* de la racine carrée de la fonction $z \mapsto -(z^2+2)$ définie sur un ouvert *non*-simplement connexe. Ce qui est absurde ! Par conséquent il n'existe que 2 automorphismes du revétements : $z \mapsto \pm z$. En particulier le revêtement n'est pas galoisien (dit aussi régulier), sinon il y aurait 4 automorphismes du revêtement.

Exercice 2. Soit X, Y deux surfaces de Riemann (connexes) et $f : X \to Y$ un morphisme propre non constant.

i) Montrer que l'ensemble R des points de ramification de f est discret, puis fini si Y est compact.

ii) Montrer que f est un revêtement ramifié. On notera n son degré.

iii) Soit $f : \Sigma^g \to \Sigma^h$ un morphisme où Σ^g et Σ^h sont des surfaces de genre g et h respectivement. On suppose $h > g$. Montrer que f est constante.

iv) Que peut-on dire d'une surface de Riemann compacte X qui admet une fonction méromorphe avec un unique pôle, ce pôle étant d'ordre 1.

[1] par le théorème d'invcersion locale

Solution 2. Commençons par montrer que, comme f est propre[2], non-constante, $f : X \to Y$ est surjective. Comme f est un morphisme non constant, f est ouverte, donc $f(X)$ est ouvert non vide dans Y. Rappelons que f est aussi discrète[3]. Alors par connexité de Y, il suffit de montrer que $f(X)$ est fermé dans Y pour conclure à la surjectivité. Montrons donc que l'adhérence $\overline{f(X)}$ de $f(X)$ est égal à $f(X)$. Soit $y \in \overline{f(X)}$. Soit K_n une suite décroissante [4] de voisinages compacts de y dont le diamètre tend vers 0. Puisque y est adhérent à $f(X)$ et f est propre , $f^{-1}(K_n)$ est compact et non-vide dans X. Pour tout n on choisit un élément $x_n \in f^{-1}(K_n)$. La suite (x_n) est incluse dans le compact $f^{-1}(K_0)$, donc elle admet une sous-suite convergente $x_{\varphi(n)} \to x$. Il est alors clair que $f(x) \in \bigcap K_n = \{y\}$. D'où $y \in f(X)$. On a prouvé que $f(X)$ est fermé et donc f est surjective. Remarquons que l'on a en fait essentiellement démontré que f est fermée (ce qui est le cas de tout morphisme propre dans un espace localement compact)

1. Au voisinage d'un point de ramification x_0, il existe des cartes locales telles que, lue dans ces cartes, f s'écrive sous la forme $f(x_0 + x) - f(x_0) \cong x^n$ avec $n \geq 2$ (et indépendant du choix des cartes). En particulier, x_0 est le seul point de ramification de f dans un voisinage de x_0. Par conséquent, les points de ramification forment un ensemble R discret. Si Y est compact, $X = f^{-1}(Y)$ est compact aussi (puisque f est propre). Donc R, qui est discret dans un compact, est fini.

2. Il suffit de montrer que la restriction $f : X - f^{-1}(f(R)) \to Y - f(R)$ est un revêtement (non-ramifié). Par définition $f : X - f^{-1}(f(R)) \to Y - f(R)$ est un morphisme non-ramifié de surfaces de Riemann. C'est donc un homéomorphisme local. Comme f est discret, pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ est à la fois discret et compact, donc est fini de la forme $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Par ailleurs f est ouverte et un homéomorphisme local, donc il existe des voisinages deux à deux disjoints $U_i \ni x_i$ $(i = 1 \ldots n)$ tels que $f_{|U_i} : U_i \to f(U_i)$ soit un homéomorphisme local. Soit $V = f(U_1) \cap \cdots \cap f(U_m)$. C'est un ouvert contenant y et $V_i = f^{-1}(V) \cap U_i \cong V$ pour tout i. Les V_i sont disjoints, donc $f^{-1}(V) \cong \coprod V_i \cong V \times \{x_1, \ldots, x_n\}$ et f est un revêtement. Le nombre de feuillets est constant par connexité de Y.

3. D'après **2.**, si $f : \Sigma^g \to \Sigma^h$ est non-constant, c'est un revêtement ramifié à n-feuillets. On peut donc lui appliquer le Théorème de Riemann-Hurwitz:

$$2(1-g) = 2n(1-h) - \sum_{x \in \Sigma^g} (o(x) - 1) \quad \Leftrightarrow \quad 2(1 + (d-1)g + d(h-g-1)) = -\sum_{x \in \Sigma^g} (o(x) - 1).$$

Par hypothèse $h - g - 1 \geqslant 0$. Comme $d \geqslant 1$ et $g \geqslant 0$, on en déduit que le membre de gauche de l'équation ci-dessus est strictement positif alors que le membre de droite est négatif ou nul. Ceci est absurde, donc tout morphisme $f : \Sigma^g \to \Sigma^h$ est constant si $h > g$.

4. Soit f une fonction méromorphe sur X. Alors f définit un morphisme $f : X \to \mathbb{C}P^1$. Si f a un unique pôle, elle est non-constante et c'est un revêtement ramifié à n-feuillets. Mais d'après le cours et la feuille de TD 3, n est le nombre de pôles de f comptés avec multiplicité. Donc $n = 1$ ce qui force que f est non ramifié et un biholomorphisme. Il suit que $X \cong \mathbb{C}P^1$.

Exercice 3. Soit $\{p_1, p_2, p_3\}$ trois points distincts deux à deux dans $\mathbb{C}P^1$. Montrer que si $\{q_1, q_2, q_3\}$ sont aussi distincts deux à deux, il existe un automorphisme $\phi : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ tel que $\phi(p_i) = q_i$.

Solution 3. Les automorphismes de $\mathbb{C}P^1$ sont les homographies $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$. Comme ils sont inversibles (et composables), il suffit de montrer que trois points distincts peuvent être envoyés sur

[2] la preuve est essentiellement la même que dans le cas où X est compact

[3] comme tout morhisme non constant entre surfaces de Riemann

[4] c'est à dire $K_n \subset K_{n-1}$ pour tout n

$0, 1, \infty \in \mathbb{C}P^1$. Soit alors $f(z) = \dfrac{p_2 - p_3}{p_2 - p_1} \dfrac{z - p_1}{z - p_3}$. Il est clair que cette homographie envoie p_1 sur 0, p_2 sur 1 et p_3 sur l'infini !

Remarque : on ne peut pas faire mieux en général, car toute homographie qui fixe 3 points est l'identité.

Exercice 4 (Loi de groupe d'une courbe elliptique)**.** Soit $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ un réseau (on suppose $\mathrm{Im}(\tau) > 0$) et $E_\Gamma = \mathbb{C}/\Gamma$. On rappelle[5] qu'il existe un isomorphisme $j : E_\Gamma \xrightarrow{\sim} C$ où C est la courbe elliptique (au dessus de $\mathbb{C}P^1$) associée à l'équation $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$, isomorphisme induit par l'application $z \mapsto (\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z))$.

1. Combien y a-t-il de points à l'infini dans C ? Quel est leur degré de ramification ? Quelle est la préimage par j des points à l'infini de C ?

2. Montrer que E_Γ est muni d'une structure de groupe abélien telle que la projection $\mathbb{C} \to E_\Gamma$ soit un morphisme de groupe. On munit C de la structure de groupe donnée[6] par E_Γ

3. Le but des questions suivantes est d'interpréter *géométriquement* la structure de groupe de la question précédente.

   (a) Montrer que l'inverse d'un point $m = (x, y) \in C$ est donné par son symétrique par rapport à l'axe des abscisses $y = 0$. Quel est l'élément neutre de cette loi de groupe ?

   (b) Montrer que toute droite D coupe la courbe C en 3 points (avec multiplicité).

   (c) Soit $m \neq n$ deux points de C. Soit p le troisième point d'intersection de la droite (mn) avec C. Montrer que $m + n$ est le symétrique de p par rapport à l'axe des abscisses $y = 0$.

Solution 4. On note e_1, e_2, e_3 les racines (distinctes) du polynôme $4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$.

1. La courbe associé à l'équation et au morphisme induit par $(x, y) \mapsto x$ au dessus de $\mathbb{C}P1$ est un revêtement ramifié de degré 2 de $\mathbb{C}P^1$ car, pour tout $x_0 \in \mathbb{C} - \{e_1, e_2, e_3\}$, il existe 2 valeurs $y_0, -y_0$ distinctes[7] de y solutions de $y^2 - (4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)) = 0$, et que ces solutions dépendent holomorphiquement de x dans un voisinage de x_0; en particulier $x \mapsto (x, \pm\sqrt{4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)})$ sont des homéomorphismes locaux (où la racine carrée a été choisie de telle sorte que $y_0 = \sqrt{4x_0^3 - g_2(\tau)x_0 - g_3(\tau)}$).

   Il y a donc deux points à l'infini non-ramifiés ou un unique point ramifié d'ordre 2 (par connexité et compacité de C, le cardinal de la préimage de tout point *avec multiplicité* est constante). En remarquant que les trois points $e_1?e_2, e_3$ sont de branchements (ils n'ont qu'un seul antécédent), la formule de Riemann Hurwitz donne $2(1-1) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - o(\infty)$ ce qui force qu'il n'y a qu'un point à l'infini, ramifié d'ordre 2.

   On pouvait déterminer cela aussi en considérant la pré-image d'un lacet $x = R\exp(i\theta)$ pour R grand par l'application $(x, y) \mapsto x$ (cf le corrigé de la feuille de TD3).

   On remarque alors que cette courbe C coincide avec la courbe obtenue en prenant l'adhérence de la courbe dans $\mathbb{C}^2$ vue, après homogénéisation, dans $\mathbb{C}P^2$ (cf la feuille de TD 2).

   La pré-image par j d'un point à l'infini correspond aux valeurs pour lesquelles $\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z)$ tende vers l'infini. Donc $j^{-1}(\{\infty\}) = [0] \in E_\Gamma$.

2. La courbe E_Γ est le quotient du groupe $(\mathbb{C}, +)$ par le sous-groupe $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ qui est distingué (car $\mathbb{C}$ est abélien...). Il suit que E_Γ est un groupe abélien également et $p : \mathbb{C} \to E_\Gamma$ un morphisme de groupe (d'une unique façon qui plus est).

3. Il convient de faire un dessin, même si on peut jeter un coup d'oeil à la figure suivante. On

[5] voir le cours et la feuille de TD 2

[6] autrement dit, pour $m, n \in C$, on définit $m + n := j(j^{-1}(m) + j^{-1}(n))$

[7] et non-nulles

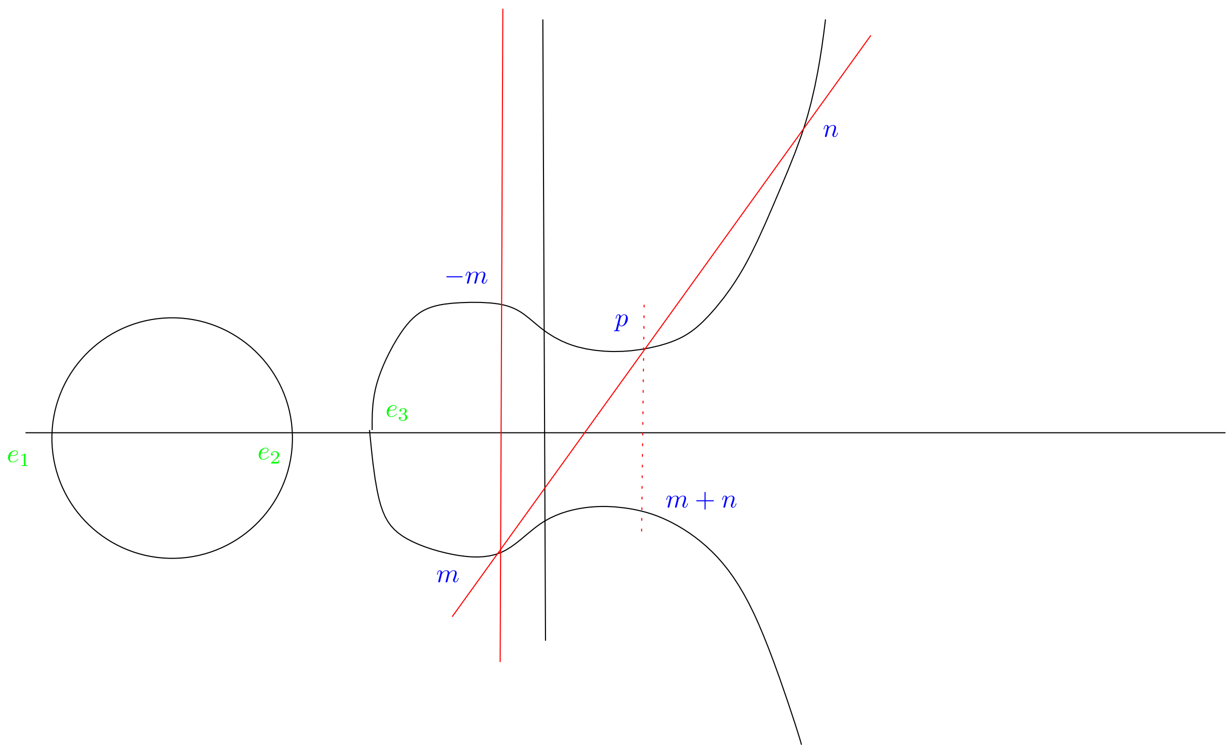

Figure 1: Description de $m+n$

peut commencer par remarquer que l'équation $y^2 - 4x^3 + g_2(\tau)x + g_3(\tau)$ est symétrique en y (autrement dit par rapport à l'axe $y = 0$), c'est à dire que si $(x, y) \in C$, alors $(x, -y)$ est aussi solution. L'application $\tau : (x, y) \mapsto (x, -y)$ est une involution sur C (qui vérifie $\tau(\infty) = \infty$) et est holomorphe comme on le voit en prenant des cartes. Plus précisément, via l'isomorphisme $j : E_\tau \to C$ on a que $\tau = j \circ (-j^{-1})$ (noter que $[-z] = -[z]$ car $\mathcal{P}$ est paire et $\mathcal{P}'$ est impaire).

Rappelons que le point à l'infini a pour coordonnées $[0, 1, 0] \in \mathbb{C}P^2$ car l'équation homogénéisée a pour équation $y^2 z = 4x_3 - g_2 xz^2 - g_3 z^3$ qui, pour $z = 0$, a $x = 0$ (et donc $y \neq 0$) pour solution dans $\mathbb{C}P^2$.

Pour $m \in C$, on notera (x_m, y_m) les coordonnées de m dans $\mathbb{C}^2$.

(a) Par définition $j([z]) + j([z']) = j([z] + [z']) = j([z + z'])$. Comme $[0]$ est l'élément neutre de E_Γ, et $j([0]) = \infty$, on obtient que l'élément neutre de C est le point à l'infini. Comme j est surjective, il existe $z \in E_\Gamma$ tel que $j([z]) = m$. De $j([-z]) = j(-[z])$, on déduit alors que

$$-m = j([-z]) = (\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(-z)) = (\mathcal{P}(z), -\mathcal{P}'(z)) = (x_m, -y_m)$$

est le symétrique de m par rapport à l'axe $y = 0$.

(b) Une droite D a pour équation $ax + by + c = 0$. Si $b \neq 0$, c'est à dire si la droite n'est pas parallèle à 'axe des ordonnées $x = 0$, alors l'intersection de D avec C est constituée par les solutions d'un polynôme de degré 3 sur $\mathbb{C}$, donc a 3 solutions avec multiplicité (dans $\mathbb{C}^2$). Si $b = 0$, on est dans le cas d'une courbe $x = x_0$ qui 2 solutions (avec multiplicité) $y = \pm\sqrt{4x_0^3 - g_2 x_0 - g_3}$ dans $\mathbb{C}^2$ plus un point à l'infini (ce qu'on vérifie en homogénéisant léquation et léquation de la droite $x = x_0 z$). On remarquera que pour $x_0 = e_1, e_2, e_3$, l'intersection $(x_0, 0)$ de D et C est de multiplicité double (et la droite tangente à la courbe).

(c) Déjà si la droite (mn) est "verticale", c'est à dire de la forme $x = x_0$, alors n est le symétrique de m et le point p est à l'infini, dont le symétrique est lui même. Comme, dans ce cas $m = -n$ d'après la question précédente, on a bien le résultat annoncé.

Supposons maintenant que la droite (mn) est déquation $y = ax + b$. Par la question précédente, il suffit de montrer que $m + n + p = 0$. On utilise encore l'isomorphisme $j := (\mathcal{P}, \mathcal{P}') : E_\Gamma \to C$. L'intersection de C avec la droite sont donc les images par j des points $[z]$ tels que $\mathcal{P}'(z) = a\mathcal{P}(z) + b$. Mais la fonction $f([z]) = \mathcal{P}'([z]) - a\mathcal{P}([z]) - b$ est méromorphe sur E_Γ et a un unique pôle d'ordre 3 en $[0]$ (car c'est le cas de $\mathcal{P}'$ et que $\mathcal{P}$ n'a qu'un pôle d'ordre 2). Par suite, d'après le cours, les zéros $[z_1], [z_2], [z_3]$ (qui sont trois avec multiplicité, ce qu'on a déjà vu) de la fonction méromorphe f sur E_Γ, vérifient l'équation $z_1 + z_2 + z_3 \cong 0[\Gamma]$[8]. Autrement dit $[z_1] + [z_2] + [z_3] = 0$ ce qui termine la démonstration.

Exercice 5 (Métrique sur le demi-plan de Poincaré)**.** Soit $H = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. On appelle "droite" de H toutes les demi-droites verticales (c'est à dire d'équation $\operatorname{Re}(z) = a$) et les demi-cercles dont un diamètre est sur l'axe réel. Deux droites sont dîtes parallèles, si elles ne se coupent pas. Si x, y sont sur une même droite D, le segment $[x, y]$ est l'arc de D joignant x à y.

a) i) Combien de points d'intersection ont deux droites distinctes ? Combien y-a-t-il de droites passant par deux points distincts ? Combien y'a-t-il de parallèles à une droite donnée passant par un point donné (distinct de la droite bien-sur) ?

   ii) Montrer que l'ensemble des droites de H est invariant sous l'action de $PSL(2, \mathbb{R}) = Aut(H)$.

   iii) Montrer que $PSL(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des droites.

b) Par analogie avec la géométrie du plan, on appelle distance sur H toute application continue $d : H \times H \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $d(z, z') = 0 \Leftrightarrow z = z'$, $d(z, z') = d(z', z)$, l'inégalité triangulaire $(d(z, z") \leqslant d(z, z') + d(z', z"))$ et $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ si y est sur le segment $[x, z]$. On va déterminer toutes les distances qui contiennent $PSL(2, \mathbb{R})$ dans leur groupe d'isométries , c'est à dire telles que $d(f(z), f(z')) = d(z, z')$ pour tout $z, z' \in H$ et $f \in PSL(2, \mathbb{R})$.

   i) Montrer qu'il existe une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $d(x, y) = f(|\ln(x/y)|)$ pour tout x, y sur l'axe imaginaire.

   ii) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $f(t) = \lambda t$.

   iii) En déduire que pour tout $x, y \in H$, on a
$$d(x, y) = \lambda \int_{[x,y]} \frac{|dz|}{\operatorname{im}(z)}.$$

   iv) Réciproquement, montrer que pour tout $\lambda > 0$, la formule $d(x, y) = \lambda \displaystyle\int_{[x,y]} \frac{|dz|}{\operatorname{im}(z)}$ définit une distance sur H qui contient $PSL(2, \mathbb{R})$ dans son groupe d'isométrie.

Solution 5. a) On peut remarquer que les droites de H sont orthogonales à l'axe réel (c'est à dire que leur tangente est orthogonale à l'axe réel en tout point d'intersection).

   i) On conseille de faire un dessin ! Deux demi-droites verticales non confondues n'ont bien entendu aucun point d'intersection[9]. Une demi-droite verticale et un demi cercle de diamètre sur l'axe réel ont au plus un point d'intersection. Enfin deux demi-cercles de diamètre sur l'axe réel ont au plus un point d'intersection. Dans les deux derniers cas, on remarque que par symétrie par rapport à l'axe réel si deux cercles (ou une droite vertical et un cercle) se coupent, alors leur symétrique par rapport à l'axe réel est aussi un point d'intersection. Un seul (au plus) de ces points symétriques peut être dans H. *Conclusion:* deux droites (distinctes) de H s'intersectent en au plus un point.

   Soit z, z' deux points de H. Si z et z' sont sur un cercle de diamétre sur l'axe réel, alors le centre $C(z, z')$ de ce cercle est sur la médiatrice du segment $[z, z']$ et donc $C(z, z')$ est

[8] ceci se vérifie en intégrant f sur le bord d'un domaine fondamental de E_Γ

[9] (sauf si on considère le point à l'infini auquel cas elles en ont un seul)

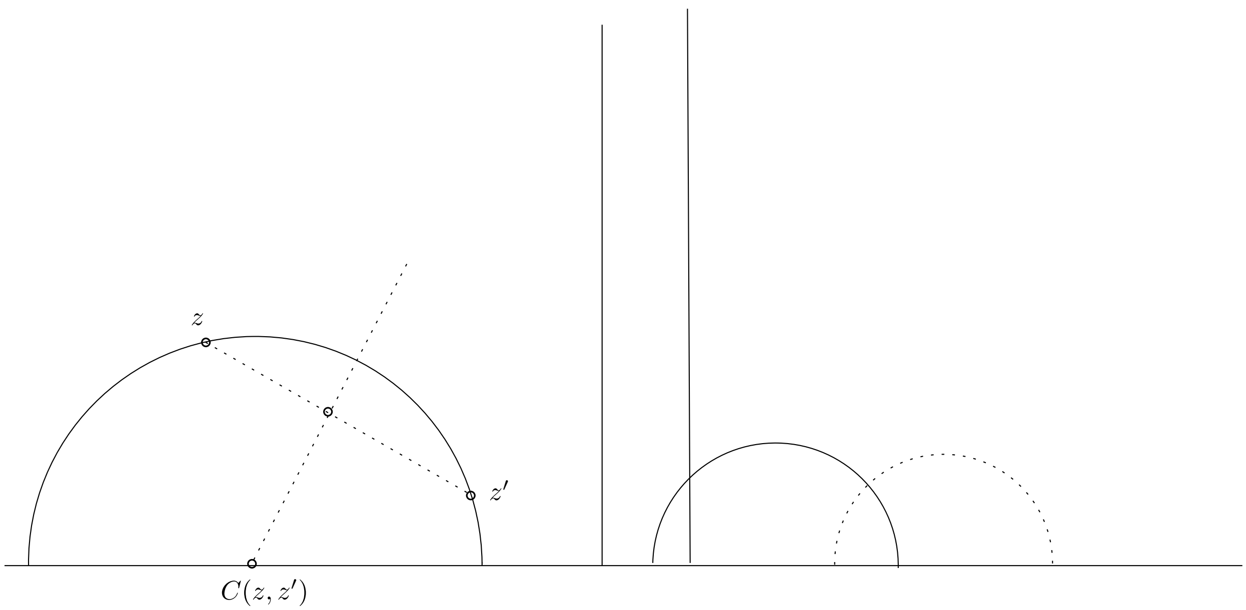

Figure 2: Droites de H

l'intersection de la médiatrice du segment $[z,z']$ et de l'axe réel. Cette intersection est au plus réduite à un point. On en déduit qu'il passe un demi-cercle à diamétre sur l'axe réel par deux points z, z' si et seulement si z et z' ne sont pas sur une même demi-droite verticale[10]. De plus dans ce cas là, ce demi-cercle est unique. On en conclut qu'il existe une *unique* droite de H passant par deux points distincts de H.

Soit D une droite de H et $P \in H - D$ un point. Si D est une demi-droite verticale issue du point $d \in \mathbb{R}$, alors pour tout point x situé sur $]\,\mathrm{Re}(P), d[$ il existe un demi-cercle passant par x et P (vu ci-dessus). Ce demi-cercle ne coupe pas D, donc définit une droite parallèle. Un raisonement similaire s'applique si D est un demi-cercle de diamétre réel $[a,b] \subset \mathbb{R}$ en distinguant les cas P est compris entre l'axe réel et D, et P situé à l'extérieur du demi-disque défini par D, *cf.* Figure 6.

ii) On sait déjà (d'après le cours/TD) que les homographies $h \in PSL(2,\mathbb{R}) = Aut(H)$ préservent l'ensemble des cerles-droite[11] et qu'elles préservent l'axe réel $\mathbb{R} \cup \infty$ et les angles orientés (elles sont holomorphes inversibles). Supposons que D est une demi-droite et que h préserve le point à l'infini. Alors, en notant $D \cup -D$ la droite de $\mathbb{C}$ engendrée par D, $h(D \cup -D)$ n'a qu'un seul point d'intersection avec $\mathbb{R}$ et, en ce point d'intersection, la tangente de $h(D \cup -D)$ est orthogonale à $\mathbb{R}$. Cela ne peut donc pas être un cercle tangent à $\mathbb{R}$. C'est donc soit une droite verticale, soit un cercle qui a l'axe réel pour diamétre. Supposons maintenant que h ne préserve pas le point à l'infini et n'envoie pas le point d'intersection de D et $\mathbb{R}$ à l'infini. Alors $h(D)$ a deux points d'intersection avec $\mathbb{R}$ et en un de ces points a une tangente orthogonale à $\mathbb{R}$. C'est donc un demi-cercle de diamétre réel. Enfin si h envoie le point à l'infini sur $\mathbb{R}$ et l'intersection de D et $\mathbb{R}$ à l'infini, alors $h(D)$ a un seul point d'intersection avec l'axe réel et de plus par continuité la tangente à $h(D)$ en $h(\infty)$ est orthogonale à $\mathbb{R}$. On en conclut que $h(D)$ est une demi-droite verticale comme précédemment.

Un raisonement similaire permet de montrer que l'image d'un demi-cercle de diamètre réel est un demi-cercle de diamétre réel ou une demi-droite verticale selon qu'une des extrémités du diamétre réel est ou non envoyée à l'infini.

[10] *i.e.* leurs parties réelles sont distinctes

[11] c'est a dire transforme un cercle en un cercle ou une droite et une droite en un cercle ou une droite.

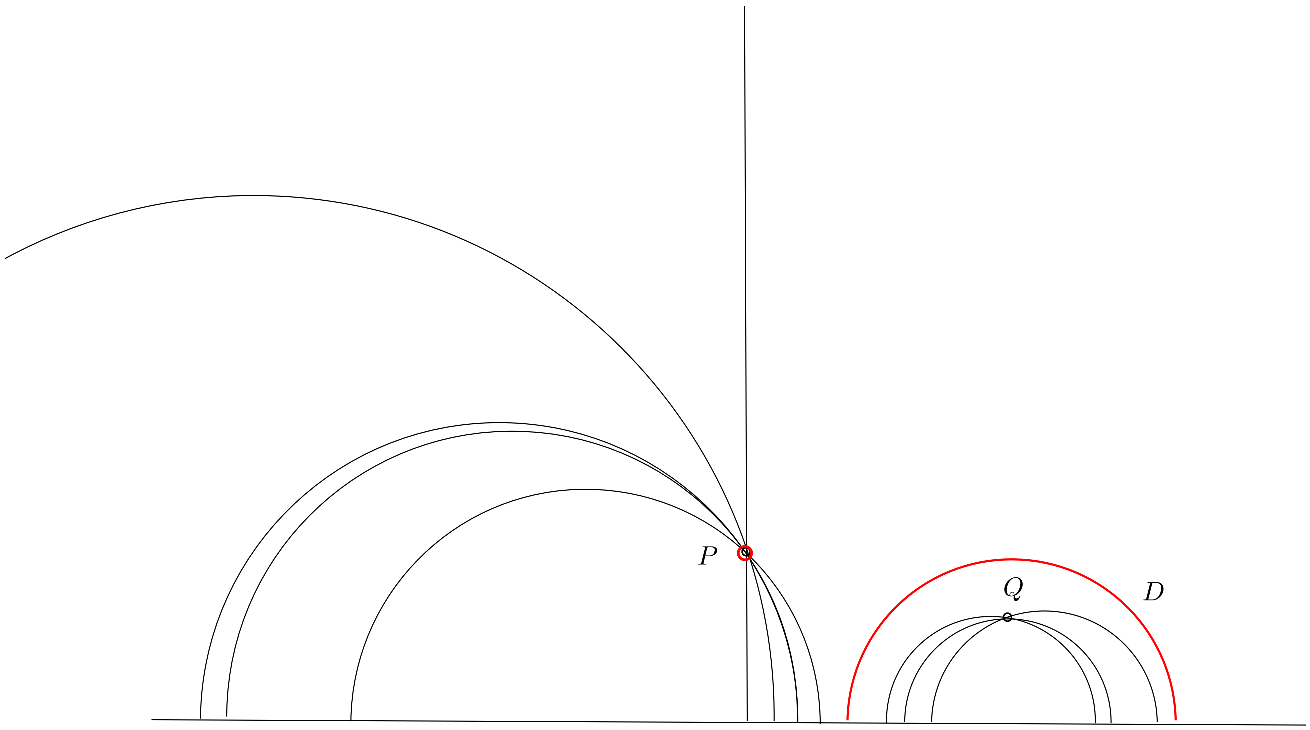

Figure 3: Parallèles issues d'un même point

Par conséquent, l'ensemble $\mathcal{D}(H)$ des droites de H est invariant sous l'action de $Aut(H)$.

iii) Puisque les translations de vecteur réel et les homothéties de rapport réel $\lambda > 0$ sont dans $Aut(H) = PSL(2, \mathbb{R})$, il est évident qu'on peut transformer toute droite verticale en l'axe des imaginaires purs par une homographie et que tout cercle de diamétre réel peut être transformé en un cercle passant par 0 et 1. Mais alors l'homographie $z \mapsto \dfrac{-z}{z-1}$ transforme le cercle diamètre $[0, 1]$ en l'axe des imaginaires purs. On en conclut que $Aut(H)$ agitt transitivement sur $\mathcal{D}(H)$.

b) i) Soit $x = ia, y = ib \in H$ (a, b réels). Comme les homothéties de rapport $1/a$ et $1/b$ sont dans $Aut(H)$, on a

$$d(x, y) = d\left(i\frac{x}{y}, i\right) = d\left(i\frac{y}{x}, i\right) \qquad (\text{car } d(i, i\frac{y}{x}) = d(i\frac{y}{x}, i)).$$

Soit alors $g :]0, +\infty[\to [0, +\infty[$ la fonction définie par $g(t) = d(it, i)$. La fonction g est continue car la distance l'est. De plus, on vient de voir que $g(1/t) = g(t)$. Comme la fonction $\ln : [1, \infty[\to [0, +\infty[$ est un homéomorphisme, on en déduit qu'il existe $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue telle que $g(t) = f(\ln(t))$ pour tout $t \geq 1$. Comme $g(1/t) = g(t)$ et $\ln(1/t) = -\ln(t)$, on obtient que $g(t) = f(|\ln(t)|)$ pour tout $t > 0$. Par définition de g, on a bien

$$f(|\ln(x/y)|) = g(x/y) = d(x, y).$$

De plus $f(0) = g(1) = d(i, i) = 0$. Donc on peut étendre f en une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par la formule $f(-t) = -f(t)$.

ii) Soit x, y, z sur l'axe imaginaire tels que $\mathrm{im}(x) < \mathrm{im}(y) < \mathrm{im}(z)$. Puisque l'axe imaginaire pur est une droite de H, $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$. On en déduit que

$$f(|\ln(x/y) + \ln(y/z)|) = f(|\ln(x/z)|) = f(|\ln(x/y)|) + f(|\ln(y/z)|).$$

Comme $\mathrm{im}(x) < \mathrm{im}(y) < \mathrm{im}(z)$, $ln(x/y) > 0$ et $ln(y/z) > 0$. Par surjetcivité de ln : $[1, +\infty[\to [0, \infty[$, il suit que pour tout $t, t' > 0$ on a $f(t+t') = f(t)+f(t')$. Comme $f(-t) = -f(t)$ on en déduit que f est un morphisme de groupes continus de $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$. C'est donc une homothétie. Donc il existe $\lambda > 0$ tel que $f(t) = \lambda t$.

iii) Pour $x = ia, y = ib$ $(a, b > 0)$ sur l'axe imaginaire, d'après la question **b).ii)**, on a

$$d(x, y) = \lambda|\ln(x/y)| = \lambda|\ln(a/b)| = \lambda\left|\int_{[x,y]} \frac{dz}{\mathrm{im}(z)}\right| = \lambda\int_{[x,y]} \frac{|dz|}{\mathrm{im}(z)}.$$

La formule cherchée est triviale si $x = y$. Soit maintenant $x \neq y$ quelconques dans H. Par **a).i)**, il existe une unique droite D passant par x et y. D'après **a).iii)**, il existe une homographie h qui transforme l'axe des imaginaires purs en D. En notant $u = h^{-1}(x)$ et $v = h^{-1}(y)$, on a, par changement de variable,

$$\lambda\int_{[x,y]} \frac{|dw|}{\mathrm{im}(w)} \quad = \quad \lambda\int_{[u,v]} \frac{|h'(z)|\ d\,z}{\mathrm{im}(h(z))}.$$

Comme h est dans $PSL(2, \mathbb{R})$, h est de la forme $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ avec $ad - bc = 1$. Il suit que $h'(z) = \dfrac{1}{(cz+d)^2}$. De plus

$$\begin{aligned}\mathrm{im}(h(z)) = \mathrm{im}\left(\frac{(az+b)\,(c\overline{z}+d)}{(cz+d)\,(c\overline{z}+d)}\right) \quad &= \quad \mathrm{im}\left(\frac{acz\overline{z}+bd+adz+bc\overline{z}}{(cz+d)\,(c\overline{z}+d)}\right)\\ &= \quad \frac{im(z)}{(cz+d)\,(c\overline{z}+d)}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lambda\int_{[x,y]} \frac{|dw|}{\mathrm{im}(w)} = \lambda\int_{[u,v]} \frac{1}{|(cz+d)|^2}\frac{(cz+d)\,(c\overline{z}+d)}{im(z)}\,|d\,z| = \lambda\int_{[u,v]} \frac{|dz|}{\mathrm{im}(z)} = d(u,v) = d(x,y).$$

On a obtenu la formule cherchée. Remarquons que l'on a en particulier montré la formule suivante

$$\frac{|d\,h(z)|}{\mathrm{im}(h(z))} = \frac{|d\,z|}{\mathrm{im}(z)} \tag{0.1}$$

pour tout $h \in PSL(2, \mathbb{R})$.

iv) D'après la formule (0.1), la formule intégrale $d(x, y) = \lambda\displaystyle\int_{[x,y]} \frac{|dz|}{\mathrm{im}(z)}$. est bien invariante par l'action de $Aut(H) = PSL(2, \mathbb{R})$, c'est à dire que $d(x, y) = d(h(x), h(y))$ pour tout $h \in Aut(H)$. Comme toute droite se ramène à l'axe des imaginaires purs par application d'un élément de $Aut(H)$, il suffit de montrer les relations $d(z, z') = 0 \Leftrightarrow z = z'$, $d(z, z') = d(z', z)$ et $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ si y est sur le segment $[x, z]$ dans le cas où x, y, z sont imaginaires purs. Dans ce cas ces propriétés découlent immédiatement de la formule $d(x, y) = \lambda|\ln(x/y)|$. Il ne reste plus qu'à montrer l'inégalité triangulaire: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. On peut supposer que x, y, z sont distincts (sinon il n'y a rien à montrer). Quitte à appliquer une homographie de $Aut(H) = PSL(2, \mathbb{R})$, on peut ramener les points x, z sur l'axe des imaginaires purs, et par symétrie, on peut supposer que x est en dessous de z, cf Figure 7.

Soit $\gamma : [0, 1] \to H$ un chemin (de classe C^1) simple de x à y et $\beta : [0, 1] \to H$ un chemin simple de y à z (en particulier cela peut être des segments de droite de H). Alors, en notant $\gamma(t) = u(t) + iv(t)$ (u, v réelles), on a

$$\int_\gamma \frac{|d\,w|}{\mathrm{im}(w)} = \int_0^1 \frac{\sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2}}{v(t)}\,d\,t \geqslant \int_0^1 \frac{|v'(t)|}{v(t)}\,d\,t = d(x, iv(1))$$

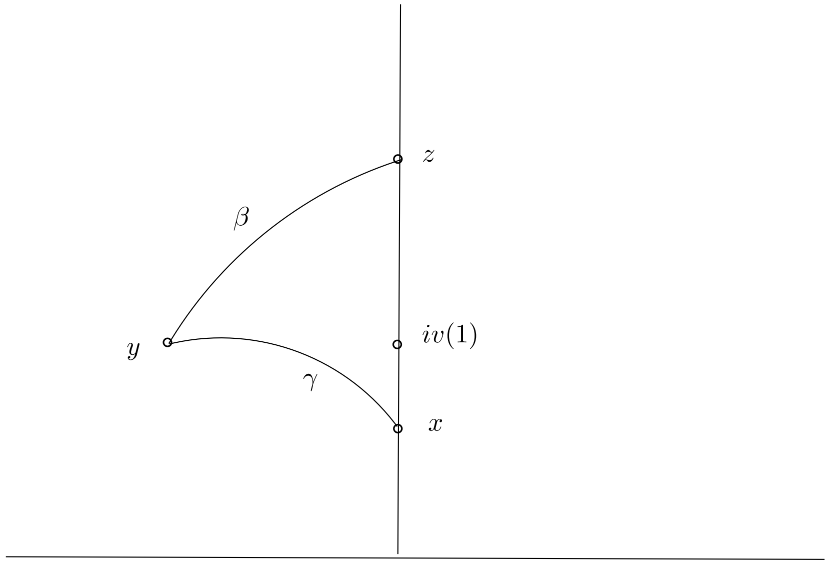

Figure 4: Inégalité triangulaire

car $x = iv(0)$. En raisonnant de même pour β, on obtient que

$$\int_\gamma \frac{|d\,w|}{\mathrm{im}(w)} + \int_\beta \frac{|d\,w|}{\mathrm{im}(w)} \geqslant d(x, iv(1)) + d(i(v(1), z) \geqslant d(x, z)$$

car $i(v(1)), x, z$ sont sur l'axe des imaginaires purs. En prenant des segments pour β et γ, on obtient l'inégalité triangulaire.

Remarque: on peut adapter le raisonnement ayant établi l'inégalité triangulaire pour montrer que les droites de H sont en fait les chemins (continus, C^1 par morceaux) entre deux points qui minimisent la distance d[12]

[12] c'est à dire des géodésiques.