Devoir de Surfaces de Riemann.

Grégory Ginot

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto f(z) = (z^2 + 1)^2$.

1) Montrer que f est un revêtement holomorphe ramifié. On note R l'image par f des points de ramification de f et $Z = f^{-1}(R)$.

2) Montrer que le revêtement $f : \mathbb{C} - Z \to \mathbb{C} - R$ est non-régulier (c'est à dire non-galoisien). Quel est le groupe des automorphismes de ce revêtement ?

Exercice 2. Soit X, Y deux surfaces de Riemann (connexes) et $f : X \to Y$ un morphisme propre non constant.

i) Montrer que l'ensemble R des points de ramification de f est discret, puis fini si Y est compact.

ii) Montrer que f est un revêtement ramifié. On notera n son degré.

iii) Soit $f : \Sigma^g \to \Sigma^h$ un morphisme où Σ^g et Σ^h sont des surfaces de genre g et h respectivement. On suppose $h > g$. Montrer que f est constante.

iv) Que peut-on dire d'une surface de Riemann compacte X qui admet une fonction méromorphe avec un unique pôle, ce pôle étant d'ordre 1.

Exercice 3. Soit $\{p_1, p_2, p_3\}$ trois points distincts deux à deux dans $\mathbb{C}P^1$. Montrer que si $\{q_1, q_2, q_3\}$ sont aussi distincts deux à deux, il existe un automorphisme $\phi : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ tel que $\phi(p_i) = q_i$.

Exercice 4 (Loi de groupe d'une courbe elliptique)**.** Soit $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ un réseau (on suppose $\mathrm{Im}(\tau) > 0$) et $E_\Gamma = \mathbb{C}/\Gamma$. On rappelle[1] qu'il existe un isomorphisme $j : E_\Gamma \xrightarrow{\sim} C$ où C est la courbe elliptique (au dessus de $\mathbb{C}P^1$) associée à l'équation $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$, isomorphisme induit par l'application $z \mapsto (\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z))$.

1. Combien y a-t-il de points à l'infini dans C ? Quel est leur degré de ramification ? Quelle est la préimage par j des points à l'infini de C ?

2. Montrer que E_Γ est muni d'une structure de groupe abélien telle que la projection $\mathbb{C} \to E_\Gamma$ soit un morphisme de groupe. On munit C de la structure de groupe donnée[2] par E_Γ

3. Le but des questions suivantes est d'interpréter *géométriquement* la structure de groupe de la question précédente.

   (a) Montrer que l'inverse d'un point $m = (x, y) \in C$ est donné par son symétrique par rapport à l'axe des abscisses $y = 0$. Quel est l'élément neutre de cette loi de groupe ?

   (b) Montrer que toute droite D coupe la courbe C en 3 points (avec multiplicité).

   (c) Soit $m \neq n$ deux points de C. Soit p le troisième point d'intersection de la droite (mn) avec D. Montrer que $m + n$ est le symétrique de p par rapport à l'axe des abscisses $y = 0$.

[1] voir le cours et la feuille de TD 2

[2] autrement dit, pour $m, n \in C$, on définit $m + n := j(j^{-1}(m) + j^{-1}(n))$

Exercice 5 (Métrique sur le demi-plan de Poincaré)**.** Soit $H = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. On appelle "droite" de H toutes les demi-droites verticales (c'est à dire d'équation $\mathrm{Re}(z) = a$) et les demi-cercles dont un diamètre est sur l'axe réel. Deux droites sont dîtes parallèles, si elles ne se coupent pas. Si x, y sont sur une même droite D, le segment $[x, y]$ est l'arc de D joignant x à y.

a) i) Combien de points d'intersection ont deux droites distinctes ? Combien y-a-t-il de droites passant par deux points distincts ? Combien y'a-t-il de parallèles à une droite donnée passant par un point donné (distinct de la droite bien-sur) ?

   ii) Montrer que l'ensemble des droites de H est invariant sous l'action de $PSL(2, \mathbb{R}) = Aut(H)$.

   iii) Montrer que $PSL(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur l'ensemble des droites.

b) Par analogie avec la géométrie du plan, on appelle distance sur H toute application continue $d : H \times H \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $d(z, z') = 0 \Leftrightarrow z = z'$, $d(z, z') = d(z', z)$, l'inégalité triangulaire $(d(z, z") \leqslant d(z, z') + d(z', z"))$ et $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$ si y est sur le segment $[x, z]$. On va déterminer toutes les distances qui contiennent $PSL(2, \mathbb{R})$ dans leur groupe d'isométries , c'est à dire telles que $d(f(z), f(z')) = d(z, z')$ pour tout $z, z' \in H$ et $f \in PSL(2, \mathbb{R})$.

   i) Montrer qu'il existe une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $d(x, y) = f(|\ln(x/y)|)$ pour tout x, y sur l'axe imaginaire.

   ii) Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $f(t) = \lambda t$.

   iii) En déduire que pour tout $x, y \in H$, on a

$$d(x, y) = \lambda \int_{[x,y]} \frac{|dz|}{\mathrm{im}(z)}.$$

   iv) Réciproquement, montrer que pour tout $\lambda > 0$, la formule $d(x, y) = \lambda \int_{[x,y]} \frac{|dz|}{\mathrm{im}(z)}$ définit une distance sur H qui contient $PSL(2, \mathbb{R})$ dans son groupe d'isométrie.