Feuille de TD 1 de Surfaces de Riemann. Exemples élémentaires, morphismes et fonctions méromorphes.

Grégory Ginot

Un *morphisme* $f : X \to Y$ entre surfaces de Riemann (non nécéssairement connexes) désignera une application $f : X \to Y$ qui est *holomorphe*.

Exercice 1 (La sphère de Riemann). Soit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, la sphère unité[1] de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. On note $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$, les "pôles Nord et Sud" de S^2. on identifie $\mathbb{R}^2$ avec le plan $z = 0$. Soit $p_N : S^2 - \{N\} \to \mathbb{R}^2$ l'application, appelée projection stéréographique (de pôle nord), qui associe à un point $m \in S^2 - N$ le point d'intersection de $\mathbb{R}^2$ avec la demi droite issue de N et passant par m. De même, on note $p_S : S^2 - \{S\} \to \mathbb{R}^2$, la projection stéréographique de pôle sud.

1. Montrer que p_N et p_S sont des homéomorphismes. Décrire géométriquement la composée $p_S \circ {p_N}^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{0\} \to \mathbb{R}^2 - \{0\}$.
2. En déduire que S^2 peut être muni d'une structure de surface de Riemann.
3. Que devienne un cercle, une droite de $\mathbb{R}^2$ après application de ${p_N}^{-1}$?
4. Montrer que p_N préserve les angles, mais pas les distances.
5. Montrer que $d(m, n) = arcos(\langle m, n\rangle)$ définit une distance sur S^2 (muni de sa topologie).
6. Montrer qu'il n'existe aucune application $f : U \to \mathbb{R}^2$ (où $U \subset S^2$ est un ouvert) qui préserve les distances.

Exercice 2 (Espaces Projectifs complexes). On note $\mathbb{C}P^n = (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{C}^*$ l'espace des droites complexes de $\mathbb{C}P^{n+1}$ muni de la topologie quotient.

1. Montrer que $\mathbb{C}P^n$ est une variété complexe de dimension n compacte et connexe.
2. Montrer que $\mathbb{C}P^1$ est isomorphe à S^2 en tant que surface de Riemann. Vérifier également que $\mathbb{C}P^1$ s'identifie à $\widehat{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec la structure de surface de Riemann donnée dans l'Exemple 1.3 du cours, c'est à dire munie des cartes $z_1 : \widehat{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$, $z_1(z) = 1/z$ et $z_2 : \widehat{C} - \{\infty\} \to \mathbb{C}$, $z_2(z) = z$.

Exercice 3 (Fonctions holomorphes et méromorphes).

1. Montrer que toute fonction holomorphe sur une surface de Riemann *connexe* et *compacte* est constante.
2. Montrer que toute fonction méromorphe sur une surface de Riemann X peut être vue comme un morphisme (c'est à dire une application holomorphe) $f : X \to \mathbb{C}P^1$.
3. Montrer que les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}P^1$ sont les fonctions rationnelles.

Exercice 4 (Morphismes entre surfaces de Riemann). Soit $f : X \to Y$ un morphisme non-constant entre surfaces de Riemann *connexes*.

1. Montrer que f est ouverte.

[1] dîte de Riemann lorsqu'on la munit de "sa" structure complexe

2. Montrer que f est discrète (c'est à dire que, pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ est discret).

3. Si f est injective, montrer que f est un isomorphisme (de surfaces de Riemann) de X sur $f(X)$.

4. On dit que f est ramifié en un point $x \in X$ si il n'existe aucun voisinage V_x de x tel que $f_{|V_x}$ soit injective. Montrer que f est non ramifié si et seulement si f est un homéomorphisme local. Donner des exemples de morphismes ramifiés et non-ramifiés.

5. On suppose que X et Y sont compacts. Montrer que f est surjective. En prenant $X = \mathbb{C}P^1 = Y$, en déduire le théorème fondamental de l'algèbre.

6. Où peut-on supprimer les hypothèses de connexité dans les questions précédentes ?

Exercice 5 (Constructions de surfaces de Riemann à partir d'une autre)**.** Soit X une surface de Riemann.

1. Si Γ est un groupe (discret) qui agit analytiquement sur X, librement et proprement. Montrer que le quotient X/Γ a une structure naturelle de surface de Riemann telle que la projection $X \to X/\Gamma$ soit un morphisme.

2. Soit $\tilde{X}$ un espace topologique séparé et $f : \tilde{X} \to X$ un homéomorphisme local. Montrer qu'il existe une *unique*[2] structure de surface de Riemann sur $\tilde{X}$ qui fasse de f un *morphisme*.

Exercice 6 (Automorphismes de D, H, $\mathbb{C}P^1$)**.** On note $D = B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$ le disque unité et $H = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré.

1. Montrer que D et H sont des surfaces de Riemann. Sont-elles compactes ?

2. Montrer que D est homéomorphe à $\mathbb{C}$ mais n'est *pas* isomorphe à $\mathbb{C}$ (en tant que surface de Riemann). Montrer que D est isomorphe à H via une homographie que l'on explicitera.

3. Identifier le groupe $Aut(\mathbb{C})$ des automorphismes de $\mathbb{C}$. Agit-il transitivement sur $\mathbb{C}$?

4. Montrer que le groupe $Aut(\mathbb{C}P^1)$ des isomorphismes de $\mathbb{C}P^1$ est le groupe des homograhies[3] et qu'il agit transitivement sur $\mathbb{C}P^1$.

5. Identifier les groupe $Aut(D)$ des automorphismes de D et $Aut(H)$ des automorphismes de H.

Exercice 7. Soit K un compact inclus dans $\mathbb{C}$ et f une fonction méromorphe sur un voisinage de K.

1. Si f n'a ni pôle ni zéro sur ∂K, alors
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)} = Z(f) - P(f)$$
où $Z(f)$ est le nombre de zéros et $P(f)$ le nombre de pôles de f comptés avec multiplicités.

2. Soit X une surface de Riemann et g une fonction holomorphe sur X. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ un complexe et $x_0 \in X$ une racine d'ordre k de l'équation $g(x_0) = z_0$. Déduire de **1)** qu'il existe un voisinage V_x de x dans X et un voisinage V_z de z, tels que l'équation $g(x) = z$ a exactement k solutions simples dans V_x pour $z \in V_z$.

3. On suppose que f est définie sur $\mathbb{C}$ et a pour période un réseau $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ (autrement dit, f est méromorphe sur la courbe elliptique $T_{(e_1,e_2)}$). On note P le domaine fondamental de Γ. Montrer que
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial P}\frac{zf'(z)}{f(z)-a} = \sum a_i - \sum b_j$$
où a_i sont les solutions de $f(z) = a$ dans P et les b_j sont les pôles de f dans P (comptés avec multiplicité).

[2] à isomorphisme de surfaces de Riemann près
[3] dit aussi groupe de Möbius