Feuille de TD 2 de Surfaces de Riemann. Tores comme surfaces de Riemann: courbes elliptiques

Grégory Ginot

Exercice 1 (Surface de Riemann du logarithme)**.** Soit D un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}^*$.

1. Rappeler pourquoi l'intégrale $\displaystyle\int_1^v \frac{d\,t}{t}$ définit une fonction holomorphe sur D mais pas sur $\mathbb{C}^*$.
2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^v \frac{d\,t}{t}$ induit un morphisme de surfaces de Riemann noté $\widetilde{\log} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z}$ (où $2i\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}^2$ est un réseau de dimension 1).
3. Montrer que la fonction exponentielle induit un isomorphisme $\exp : \mathbb{C}/2i\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ qui est l'inverse de $\widetilde{\log}$.

Exercice 2 (Structures complexes sur un tore: courbes elliptiques)**.** Soit $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ un réseau de $\mathbb{C}$ (c'est à dire que $e_1/e_2 \notin \mathbb{R}$). On considère le Tore $T_{(e_1,e_2)} := \mathbb{C}/\Gamma$.

1. Montrer que $T_{(e_1,e_2)}$ a une structure de surface de Riemann telle que $p : \mathbb{C} \to T_{(e_1,e_2)}$ un morphisme; exhiber un atlas de $T_{(e_1,e_2)}$.
2. Montrer que $T_{(e_1,e_2)}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{C}$ ou D et qu'il existe $\tau \in H$ tel que $T_{(e_1,e_2)}$ est isomorphe à $T_{(1,\tau)}$.
3. Montrer que $T_{(1,\tau)}$ est *homéomorphe* à $T_{(1,\nu)}$ et qu'ils sont *isomorphes* si et seulement si $\nu = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$ avec $ad-bc=1$ et $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que les fonctions méromorphes sur $T_{(e_1,e_2)}$ sont les fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ de période e_1 et e_2.

Exercice 3 (Courbes elliptiques via leurs équations)**.** Soit $X_{g_2,g_3} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,/\, y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$ l'ensemble des zéros de la courbe algébrique $y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3$.

1) On suppose que le pôlynome $4x^3 - g_2x - g_3$ a ses racines simples.
   i) Montrer que X_{g_2,g_3} est une surface de Riemann qui se plonge naturellement dans $\mathbb{C}P^2$ (on identifiera $\mathbb{C}^2$ avec le complémentaire de l'hyperplan à l'infini $z = 0$).
   ii) On notera C_{g_2,g_3} les solutions de $y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3$ dans $\mathbb{C}P^2$ et on montrera que C_{g_2,g_3} est une surface de Riemann compacte.
   iii) Montrer que l'application $X_{g_2,g_3} \to \mathbb{C}$ défini par $(x,y) \mapsto x$ se prolonge en un morphisme $C_{g_2,g_3} \to \mathbb{C}P^1$ de surfaces de Riemann.
2) Soit $\Gamma_\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ un réseau (avec $\mathrm{im}(\tau) > 0$) et $\mathcal{P}$ sa fonction de Weierstrass. On suppose que $g_2 = g_2(\tau)$ et $g_3 = g_3(\tau)$. On note E_τ le quotient $\mathbb{C}/\Gamma_\tau$.
   i) Vérifier que X_{g_2,g_3}, C_{g_2,g_3} sont des surfaces de Riemann et montrer que l'application $j : E_\tau - [\Gamma_\tau] \to \mathbb{C}P^2$ définie par $z \mapsto (\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z), 1)$ induit un isomorphisme de $E_\tau - [\Gamma_\tau]$ sur X_{g_2,g_3} et montrer qu'il s'étend en un isomorphisme $\tilde{j} : E_\tau \xrightarrow{\sim} C_{g_2,g_3}$.
   ii) Montrer que la forme différentielle $x \mapsto \dfrac{d\,x}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$ définie sur $\mathbb{C} - \{a_1,a_2,a_3\}$ (où a_1,a_2,a_3 sont les racines de $4x^3 - g_2x - g_3$) se prolonge en une forme différentielle holomorphe $f(x)\,d\,x$ sur C_{g_2,g_3}.

iii) Montrer que l'on peut définir localement (dans $\mathbb{C} - \{a_1, a_2, a_3\}$) une fonction de la forme $z(u) = \int_u^\infty f(x)dx$ (où l'intégrale se fait le long d'un chemin non borné évitant a_1, a_2, a_3) mais que f n'admet pas de primitive globale.

iv) Calculer $\frac{dz}{du}$ et $\frac{du}{dz}$ et en déduire que z définit une fonction holomorphe $\mathbb{C} \to E_\tau$ qui est une coordonnée locale.

v) Trouver un chemin γ_τ dans $\mathbb{C}$ tel que $\int_{\gamma_\tau} f(x)dx = -\tau/2$.

Exercice 4. Calculer $g_2(i)$ et $g_3\left(\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\right)$. En déduire que si g_2 ou g_3 est nul, alors il existe un réseau Γ tel que E_Γ est isomorphe à C_{g_2,g_3}.

Exercice 5 (Une surface de degré 3)**.** Soit $X = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,/\, x^3 + y^3 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$.

1. Montrer que X est une surface de Riemann et exhiber un atlas. Vérifier que les projections canoniques $p_1, p_2 : X \to \mathbb{C}$ définie par $p_1(x,y) = x$ et $p_2(x,y) = y$ sont holomorphes. Quels sont les points de ramification de p_1 ?
2. Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. On pourra intégrer la fonction $\frac{1}{\sqrt[3]{1-z^3}}$ sur l'image par p_1 d'un lacet bien choisi de X.
3. Soit $Y = \{[x,y,z] \in \mathbb{C}P^2 \,/\, x^3 + y^3 = z^3\}$. Vérifier que Y est bien définie et est une surface de Riemann plongée dans $\mathbb{C}P^2$. Montrer que l'application $\phi : Y \to \mathbb{C}$ définie par $[x,y,z] \mapsto \frac{y}{z}$ est méromorphe. Quels sont ses pôles ?
4. Construire un plongement holomorphe $j : X \hookrightarrow Y$ de X dans Y et un morphisme $q : Y \to \mathbb{C}P^1$ qui prolonge p_1. (on identifie $\mathbb{C}$ avec le complémentaire d'un hyperplan à l'infini de $\mathbb{C}P^1$).
5. Quel est le genre de Y ?

Exercice 6. Soit $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ un réseau de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ sa fonction de Weierstrass. Soit f une fonction méromorphe paire sur la courbe elliptique $E_\tau = \mathbb{C}^2/\Gamma$. On suppose que f a exactement n zéros $a_1, \ldots, a_n$ distincts et m pôles $b_1, \ldots, b_m$ dans un domaine fondamental P et qu'ils sont dans l'intérieur de P.

i) Montrer que si a_i ou b_j est dans l'intérieur de P, alors son conjugué $1+\tau-a_i$ est un zéro de f et $1+\tau-b_j$ est un pôle de f.

ii) Montrer que si a_i (resp. b_j) est sur le bord ∂P de P alors il admet trois autres zéros (resp. pôles) conjugués distincts (que l'on explicitera).

iii) Montrer que $f(z) = \lambda \frac{\prod_{i \in Z_f}(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(a_i))}{\prod_{j \in P_f}(\mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(b_j))}$ où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est une constante et Z_f (resp. P_f) est un ensemble de représentant de chaque zéro (resp. pôles) *non nul* (à conjugaison près).