Feuille de TD 3 de Surfaces de Riemann. Topologie des surfaces de Riemann

Grégory Ginot

Exercice 1 (Revêtements universels). Soit $D := \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1\}$ le disque unité et $D^* = D - \{0\} = \{z \in \mathbb{C}^* \,/\, |z| < 1\}$ le disque épointé.

1. Quel est le groupe fondamental de D^* ?
2. Montrer que H (le demi-plan supérieur) est le revêtement universel de D^*.
3. Quel sont les revêtements de D^* ? Lesquels sont réguliers ?
4. Montrer que tout revêtement fini de D^* est de la forme $D^* \to D^*$, $z \mapsto z^n$.
5. Montrer que D est le revêtement universel de $\mathbb{C} - \{0, 1\}$.
6. En déduire que si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe qui évite deux points, alors f est constante.

Exercice 2. On considère la fonction $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (rappel: $\sin(x) = \dfrac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$).

1. Montrer que sin est un revêtement holomorphe ramifié. Quels sont ses points de ramification ? Ses fibres en un point z ? En déduire que la restriction $\sin : \mathbb{C} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C} - \{-1, 1\}$ est un revêtement holomorphe non-ramifié.
2. Quel est le groupe fondamental de $\mathbb{C} - \{-1, 1\}$? Celui de $\mathbb{C} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$?
3. Soit $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C} - \{-1, 1\}$ et $\beta : [0, 1] \to \mathbb{C} - \{-1, 1\}$ les lacets définis par
$$\alpha(t) = 1 - \exp(2i\pi t), \qquad \beta(t) = -1 + \exp(2i\pi t).$$
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ le relévement du lacet composé $\alpha \cdot \beta$ vérifiant $f(0) = 0$ et $g : [0, 1] \to \mathbb{C} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ le relévement du lacet composé $\beta \cdot \alpha$ vérifiant $g(0) = 0$. Calculer $g(1)$ et $f(1)$.
4. Dterminer le groupe des transformations du revêtement $\sin : \mathbb{C} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C} - \{-1, 1\}$? Est-ce un revêtement régulier ?

Exercice 3 (du cours...). Soit X une surface compacte et f une fonction méromorphe sur X, non constante. Montrer que f a autant de pôles que de zéros (comptés avec multiplicité).

Exercice 4. Soit H le demi-plan supérieur et G un sous-groupe de $Aut(H)$ tel que H/G soit une surface de Riemann compacte couverte par H.

1) Quel est le revêtement universel de H/G ? Quel est son groupe fondamental ?
2) Montrer que tout élément $g \in G$ différent de 1 a deux points fixes, qui sont situés sur l'axe réel (on dit qu'un tel g est hyperbolique). Caractériser cette propriété en terme de la trace d'une matrice représentant g.
3) On suppose que le genre de H/G est $g > 1$. Montrer que tout sous-groupe abélien non-trivial de G est cyclique d'ordre infini.

Exercice 5 (Courbe elliptique du point de vue d'une intégrale multiforme...)**.** Soit $H = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{im}(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré. Soit $0 < k < 1$ un nombre réel.

i) Pour tout $u \in H$, on note

$$F(u) = \int_0^u \frac{d\,z}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

où l'intégrale est prise sur un chemin de 0 à u dans H (où on fixe $\sqrt{1} = 1$). Montrer que $u \mapsto F(u)$ définit une fonction holomorphe de $H \to \mathbb{C}$ (et en particulier que cette fonction est bien définie...).

ii) Montrer que F se prolonge par continuité à tout le demi-plan supérieur $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{im}(z) \geqslant 0\}$.

iii) Quelle est l'image par F de l'axe réel $\mathrm{im}\, z = 0$? On pourra noter A et B les intégrales (d'une fonction réelle) $A = \displaystyle\int_0^1 \frac{d\,x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ et $B = \displaystyle\int_1^{1/k} \frac{d\,x}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$

iv) Montrer que F induit un isomorphisme (de surfaces de Riemann) $H \to F(H)$ et que $F(H)$ est simplement connexe.

v) Montrer que pour tout $a \in F(H)$, il existe une courbe fermée simple $\gamma \in F(H)$ telle que a est dans la composante connexe compacte de $\mathbb{C} - \gamma$.

vi) En déduire que $F(H)$ est l'intérieur d'un rectangle dont on précisera les sommets.

vii) Montrer que F^{-1} se prolonge en une fonction méromorphe sur la courbe elliptique $\mathbb{C}_{/4A\mathbb{Z}\oplus 2iB\mathbb{Z}}$. Quels sont ses zéros et pôles ?

viii) Quel est le genre de la surface de Riemann associée à l'équation $w^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2)$ au dessus de $\mathbb{C}P^1$? y'a-t-il un lien entre cette surface de Riemann et les questions précédentes ?

Exercice 6 (genre d'une surface de Riemann associée à une équation algébrique)**.**

1) Soit $g > 1$ un entier et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes distincts. En considérant les courbes déquation $w^2 = (z-a_1)\ldots(z-a_n)$, montrer que pour tout entier $g > 0$, il existe une surface de Riemann (compacte) de genre g qui est un revêtement holomorphe ramifié de $\mathbb{C}P^1$ à 2 feuillets.

2) Quel est le genre de la surface de Riemann au dessus de $\mathbb{C}P^1$ définie par l'équation $w^n + z^n = 1$?

3) Quel est le genre de la surface de Riemann au dessus de $\mathbb{C}P^1$ définie par l'équation $w^4 + z^n - 1$?

4) Quel est le genre de la surface de Riemann au dessus de $\mathbb{C}P^1$ définie par l'équation $w^6 = z^3 + jz^2 + j$?

Exercice 7. On note Σ^g une surface de Riemann (compacte) de genre g.

1) Soit $f : \Sigma^g \to \Sigma^h$ un morphisme. Rappeler pourquoi f est un revêtement ramifié. Montrer que le degré de ramification total de f est pair. Montrer que si $h = 0$ et f est non-ramifié, alors f est un biholomorphisme.

2) Montrer que si $g = 0$ et que f a un unique point de branchement, alors f est un biholomorphisme. Montrer que toute surface couverte par $\mathbb{C}P^1$ est biholomorphe à $\mathbb{C}P^1$.

3) Montrer que $h = g \geqslant 1$ implique f non ramifié. Montrer que si $h = g > 1$ alors f est un biholomorphisme.