# Feuille de TD 4 de Surfaces de Riemann. Diviseurs, Théorème de Riemann-Roch

Grégory Ginot

Comme d'habitude, toutes les surfaces seront supposées connexes, sauf mention du contraire. Si $D = \sum n_x \cdot x$ est un diviseur sur $X$, on notera $\mathcal{L}(D) = \{f \text{ méromorphe } / (f) + D \geq 0\}$ et $h^0(D) = \dim(\mathcal{L}(D))$.

**Exercice 1** (Diviseurs sur $\mathbb{C}P^1$)**.**

1. Montrer que quels que soient $x \neq y \in \mathbb{C}P^1$, il existe une fonction méromorphe $f$ sur $\mathbb{C}P^1$ de diviseur $(f) = x - y$.
2. Montrer deux diviseurs $D, D'$ sur $\mathbb{C}P^1$ sont linéairement équivalents si et seulement si $\deg(D) = \deg(D')$.
3. Soit $D = 0 + 1$. Calculer l'espace $\mathcal{L}(D)$.
4. Montrer que $h^0(D) = \max(0, 1 + \deg(D))$ pour tout diviseur $D$ sur $\mathbb{C}P^1$

**Exercice 2** (Diviseurs sur une courbe elliptique)**.** Soit $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ un réseau sous forme normale de $\mathbb{C}$ et $E_\tau = \mathbb{C}/\Gamma$ la courbe ellliptique associée.

1. Calculer les diviseurs $(\mathcal{P}'(x))$ et $(\mathcal{P}(x))$ de la fonction de Weierstrass et de sa dérivée.
2. Pour tout $x \in E_\tau$ et $n \in \mathbb{Z}$, calculer $h^0(n \cdot x)$.
3. Calculer un diviseur canonique de $E_\tau$.

**Exercice 3.** Soit $X$ une surface de Riemann compacte, de genre $g$.

1. En utilisant Riemann-Roch, montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur $X$ avec un unique pôle d'ordre au plus $g + 1$.
2. Soit $n \geq 2g$. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe sur $X$ ayant un unique pôle et d'ordre exactement $n$.
3. Montrer que $X$ est un revêtement ramifié de $\mathbb{C}P^1$ à au plus $g + 1$-feuillets. En déduire que si $X$ est de genre 0, $X$ est isomorphe à $\mathbb{C}P^1$. Montrer que si $g = 1$, l'ordre du pôle ne peut pas être 1.
4. Soit $f : X \to X$ holomorphe non-constante. Montrer que $f$ a au plus $2g+2$ points fixes (on pourra utiliser la question précédente).

**Exercice 4** (Formes différentielles holomorphes)**.** Soit $X$ une surface de Riemann compacte, de genre $g$.

1. Montrer que l'espace vectoriel des formes différentielles holomorphes sur $X$ est de dimension $g$.
2. Pour tout diviseur $D$, on note $\Omega(D) = \{\omega \in \Omega(X) \text{ méromorphe } / (\omega) \geq D\}$. Soit $K = (\nu)$ un diviseur canonique sur $X$. Montrer qu'il y a un isomorphisme $\mathcal{L}(K - D) \cong \Omega(D)$.
3. On suppose $g \geq 1$. On veut montrer que pour tout $x \in X$, il existe une forme holomorphe $\omega \in \Omega(X)$ qui ne s'annule pas en $x$.
   i) On suppose $g > 1$. Montrer que $h^0(x) = 1$.
   ii) Démontrer le résultat si $h^0(K - x) < h^0(K)$.
   iii) Conclure.

**Exercice 5.** Soit $X$ la surface de Riemann associée à l'équation algébrique $w^2 = (z - a_1) \cdots (z - a_{2g+2})$ au dessus de $\mathbb{C}P^1$.

1. Rappeler pourquoi $X$ est de genre $g$ et pourquoi les fonctions $(w, z) \mapsto z$ et $(w, z) \mapsto w$ s'étendent en des fonctions méromorphes $z : X \to \mathbb{C}P^1$ et $w : X \to \mathbb{C}P^1$ sur $X$. Quel est le cardinal de $z^{-1}(a_i)$ ? Celui de $z^{-1}(\infty)$ ?
2. On note (par un abus de notation) $a_i := z^{-1}(a_i)$ et $p_1, p_2 = z^{-1}(\infty)$. Calculer les diviseurs $(z)$, $(w)$?
3. Montrer que les formes différentielles $\dfrac{z^i\, dz}{w}$ $(0 \leq i \leq g-1)$ sont holomorphes sur $X$. Quels sont leurs diviseurs ?
4. Montrer que les formes différentielles de la question **3.** sont une base de l'espace vectoriel des formes différentielles holomorphes.

**Exercice 6** (Surfaces de genre 2)**.** Soit $X$ une surface de Riemann de genre 2.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, il existe une fonction méromorphe avec un seul pôle d'ordre 3 en $x$.
2. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe avec un seul pôle d'ordre 2 en $x$ si et seulement si $h^0(2x) > 1$. Un tel point s'appelle un point de Weierstrass.
3. Montrer qu'il existe une fonction méromorphe avec un seul pôle d'ordre 2 en $x$ si et seulement si il existe une forme différentielle holomorphe avec un zéro d'ordre au moins 2 en $x$.
4. Montrer qu'il existe deux formes holomorphes $f_1(z)dz$ et $f_2(z)dz$[1] telles que $x$ est un point de Weierstrass si et seulement si $W(z) = f_1(z)f_2'(z) - f_1'(z)f_2(z)$ s'annule en $x$.
5. Quelle est l'équation satisfaite par $W(z)$ lorsqu'on change de carte locale ? Montrer que $W$ définit une section du fibré canonique à la puissance 3, $(T^*X)^{\otimes 3}$ dont les points de Weierstrass sont les zéros.
6. Montrer que $W$ admet exactement 6 points de Weierstrass avec multiplicités (la mutliplicité étant l'ordre du zéro de $W$).

**Exercice 7** (Courbes hyperelliptiques)**.** Une surface de Riemann est dîte hyperelliptique s'il elle est un revêtement ramifié de degré 2 de $\mathbb{C}P^1$.

1. Montrer que toute surface de genre $\leqslant 1$[2] est hyperelliptique. Exhiber "explicitement" un revêtement ramifié d'ordre 2 de la surface.
2. Quel que soit $g \in \mathbb{N}$, exhiber une surface hyperelliptique de genre $g$.
3. Montrer qu'une surface est hyperelliptique si et seulement si il existe un diviseur $D \geq 0$ de degré 2 tel que $h^0(D) \geq 2$. En déduire que toute surface de genre 2 est hyperelliptique.
4. Montrer qu'il existe une involution holomorphe $\tau : X \to X$ [3]
5. Montrer que $X$, de genre $g$, est hyperelliptique si et seulement si il existe une involution holomorphe avec exactement $2g + 2$ points fixes.

[1] ces formes sont données en coordonnées locales bien entendu.
[2] en particulier toute courbe elliptique
[3] *i.e.* $\tau^2 = \mathrm{Id}$