# Examen : Introduction aux surfaces de Riemann

1. Calculer le genre de la surface de Riemann définie par le polynôme $z^n + w^n - 1$.

2. Soit $\{ p_1, p_2, p_3 \}$ trois points distincts deux à deux dans $\mathbb{C}P^1$. Montrer que si $\{ q_1, q_2, q_3 \}$ sont aussi distincts deux à deux, il existe un automorphisme $\varphi : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ tel que $\varphi(p_i) = q_i$.

3. Soit $X$ une surface de Riemann compacte et $\varphi : X \to X$ holomorphe non-ramifiée. Montrer que $\varphi$ est un biholomorphisme ou $X$ est de genre 1. Donner un exemple dans lequel $\varphi$ n'est pas un automorphisme.

4. Soit $d_\lambda(z) = \lambda z$, avec $\lambda > 0$, agissant sur le demi-plan de Poincaré $H$. Déterminer un domaine fondamental pour le groupe $\Gamma$ engendré par $d_\lambda$. Déterminer le quotient $H/\Gamma$. Calculer la longueur de la géodésique fermée dans le quotient.

5. En utilisant Riemann-Roch, montrer que, sur une surface de Riemann compacte de genre $g$, il existe une fonction méromorphe avec un seul pôle d'ordre au plus $g + 1$. Montrer que si le genre est $\geq 1$, l'ordre du pôle ne peut pas être 1 et donner un exemple de fonction méromorphe avec un seul pôle d'ordre 2 quand le genre est 1.

6. Montrer que, pour tout point $p$ sur une surface de Riemann compacte $X$ de genre $g \geq 1$, il existe une forme holomorphe $\omega \in \Omega(X)$ avec $\omega(p) \neq 0$. Pour une surface de genre 1, montrer qu'il existe une forme holomorphe non-nulle en tout point.

7. On défini le fibré holomorphe $Q$ de différentielles quadratiques comme le fibré dont les fonctions de transitions sont
$$g_{ij} = \left( \frac{dz_j}{dz_i} \right)^2 .$$
   (a) Montrer qu'on obtient ces fonctions de transition pour le fibré dont les sections holomorphes sont, localement, de la forme $f(z)(dz)^2$, avec $f(z)$ holomorphe.
   (b) Si $K$ est un diviseur associé au fibré canonique, trouver un diviseur $D$ tel que $Q = L(D)$ ($Q$ est le fibré associé au diviseur $D$).
   (c) Trouver explicitement $D$ tel que $Q = L(D)$ sur $\mathbb{C}P^1$.
   (d) Calculer le degré $deg\, Q$.

(e) Calculer la dimension $dim\, h^0(D)$ de l'espace de sections holomorphes de $Q$ sur une surface de Riemann compacte de genre $g = 0$, $g = 1$ et $g \geq 2$.

8. Une surface de Riemann $X$ est dite hyperelliptique s'il existe $z : X \to \mathbb{C}P^1$ revêtement ramifié de degré deux ( i.e., il existe une fonction méromorphe avec un seul pôle d'ordre 2 ou seulement deux pôles simples).

   (a) Montrer que toute surface de genre un est hyperelliptique. Montrer que pour tout $g > 1$, il existe une surface de genre $g$ hyperelliptique.

   (b) Si $X$ est hyperelliptique, quel est le nombre des points de ramifications (compter avec multiplicités) du revêtement ramifié de $\mathbb{C}P^1$ en fonction du genre de $X$?

   (c) Montrer qu'une surface $X$ est hyperelliptique si et seulement si il existe un diviseur $D \geq 0$ avec $deg\, D = 2$ tel que $dim\, h^0(D) \geq 2$.

   (d) Si $X$ est hyperelliptique, montrer qu'il existe une involution holomorphe $\tau : X \to X$ ($\tau^2 = Id$). Déterminer cette involution explicitement pour une surface de genre un.