

QUELQUES EXERCICES POUR LE COURS DE TOPOLOGIE ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE
FEUILLE N°1: NOTION D'HOMOTOPIE, DEGRÉ ET INDICE DES LACETS.

Exercices élémentaires :

Ces exercices sont là pour vous aider à vérifier si vous avez (ou non...) assimilé le cours !

Sur l'homotopie, la contractibilité, les rétractes par déformation:

Exercice 1. (*cônes, espaces des chemins, recollements ...*) Soit X un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application continue.

1. Le **cône sur** X est l'espace topologique quotient $C(X) := (X \times [0, 1]) / ((x, 1) \sim (y, 1))$. Montrer que X s'identifie¹ à un sous-espace fermé de $C(X)$ et que $X \mapsto C(X)$ est un foncteur dans la catégorie des espaces topologiques². Montrer que $C(X)$ est *contractile*.
2. Soit X, Y deux espaces topologiques, A une partie non-vide de X et $f : A \rightarrow Y$, une application continue. Le **recollement de X sur Y par f** est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y := (X \amalg Y) / (x \sim f(x), x \in A).$$

- (a) Donner un critère pour construire des applications continues $X \cup_f Y \rightarrow Z$ en fonctions d'applications continues $X \rightarrow Z$ et $Y \rightarrow Z$.
- (b) Montrer que si A est fermé, alors Y s'identifie à un sous-espace de $X \cup_f Y$. Si de plus X, Y sont compacts, montrer que $X \cup_f Y$ est compact.
- (c) (*La sphère S^3 obtenue par un "collage" classique*) Montrer que S^3 est obtenue en recollant deux "tores pleins" $D^2 \times S^1$ au moyen de l'application identique

$$D^2 \times S^1 \supset S^1 \times S^1 \xrightarrow{\text{Id}} S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2.$$

Indication: On identifiera S^3 au sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$ défini par l'équation $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ et les tores pleins aux sous-ensembles définis par $|z_1| \leq |z_2|$ et $|z_1| \geq |z_2|$.

3. Soit $x \in X$ un point de X . On note $P_*X = \{f : [0, 1] \rightarrow X, f(0) = x\}$ l'**espace des chemins** (issus de x) que muni de la topologie compacte-ouverte. Montrer que P_*X est contractile.

Exercice 2 (Un peu de rétraction par déformation). *Configurations de 3 points distincts dans $\mathbb{C}$*

1. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ se rétracte par déformation sur l'ensemble X formé de la réunion des cercles de centre 0 et 1 et de rayon $1/2$ (ne pas oublier de faire un dessin !).
2. Montrer que $C_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 \neq z_2\}$ se rétracte par déformation sur S^1 identifié à l'ensemble des couples $(0, u)$ pour $u \in S^1$.
3. Montrer que $C_3 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, \text{distincts}\}$ se rétracte par déformation sur $S^1 \times X$ identifié à l'ensemble des triplets $(0, u, uv)$ pour $u \in S^1$ et $v \in X$.

Autour du degré et relèvement des angles

Exercice 3. (Additivité du degré)

Soient $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ deux applications continues telles que $f(1) = g(1)$ (on identifie S^1 avec $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$). On définit deux "produits" de f et g :

- $fg : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ est défini par $(fg)(t) = f(t)g(t)$ pour tout $t \in S^1$, c'est à dire le produit ponctuel.
- $f \star g(t) = f(t^2)$ pour $\text{Im } t \geq 0$ et $f \star g(t) = g(t^2)$ pour $\text{Im } t \leq 0$ ("dessiner" ce produit et se convaincre qu'il ne s'agit que de la composition de lacets).

¹c'est à dire qu'il existe un homéomorphisme entre X et un sous-espace de $C(X)$.

²uniquement pour ceux qui connaissent la notion de catégorie !

1. (une version du principe de Eckman-Hilton) Montrer que fg et $f \star g$ sont continues, homotopes mais distinctes en général (indication: penser à utiliser l'unité).
2. Montrer que $\deg(fg) = \deg(f \star g) = \deg(f) + \deg(g)$.

Exercice 4. (Calcul du degré) Soit $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ une application de classe C^1 et notons $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'application définie par $g(\theta) = f(\exp(i\theta))$. Soit D le demi axe réel positif, c'est à dire la droite $D = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0\}$. On suppose que pour tout $t \in S^1$ tel que $f(t) \in D$, f soit *transverse* à D à savoir que pour $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(i\theta) = t$ on a $\operatorname{Im} g'(\theta) \neq 0$. On dira que f coupe D positivement ou négativement en t suivant le signe³ de $\operatorname{Im} g'(\theta)$ que l'on notera $\operatorname{sign}_t f$.

1. Montrer que l'ensemble $f^{-1}(D)$ est fini.
2. Soit t_1 et t_2 deux éléments de $f^{-1}(D)$ consécutifs sur le cercle. Notons $g_{t_1, t_2} : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un chemin fermé qui va de 1 à $f(t_1)$ dans D puis parcourt f entre t_1 et t_2 et revient à 1 dans D . Calculer son degré.
3. En déduire la formule: $\deg f = \sum_{t \in f^{-1}(D)} \operatorname{sign}_t f$.

Exercice 5. (Problème de croisement) Peut on joindre les coins opposés d'un carré par deux chemins continus (restant en dehors du carré) qui ne se rencontrent pas ?
Mathématiquement, on considérera le carré $C = [-1, 1] \times [-1, 1]$ et $f, g : [0, 1] \rightarrow C$ deux applications continues $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \dot{C}$ telles que $f(0) = (-1, -1), f(1) = (1, 1), g(0) = (-1, 1), g(1) = (1, -1)$. (Indication: montrer par l'absurde qu'il existe $s, t \in [0, 1]$ tels que $f(s) = g(t)$ en considérant l'indice par rapport à la courbe image de f convenablement refermée.)

Exercice 6. (Tore...) Soit T_2 l'espace topologique quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (attention on quotiente par le groupe $\mathbb{Z}^2$, pas juste l'ensemble). Montrer que T_2 se plonge dans $\mathbb{R}^3$ et n'est pas contractile.

Exercice 7. (D'Alembert-Gauss via le degré) Soit P un polynôme unitaire de degré d ne s'annulant pas sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'application $H : S^1 \times]0, 1[\rightarrow S^1$ définie par $\gamma(t, u) = \frac{P\left(t \frac{1-u}{u}\right)}{\left|P\left(t \frac{1-u}{u}\right)\right|}$ s'étend en une application continue $S^1 \times I \rightarrow S^1$.
2. Evaluer $H(-, 1)$ et $H(-, 0)$ et en déduire le théorème de D'Alembert-Gauss.

Exercice 8. (Une jolie, quoique un peu taupinale, preuve du théorème du relèvement des angles)
Soit $P(S^1) := \{f : [0, 1] \rightarrow S^1, f \text{ continue}\}$ l'ensemble des applications continues de l'intervalle dans le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}$ et $P(\mathbb{R}) := \{f : [0, 1] \rightarrow S^1, f \text{ continue}\}$ l'ensemble des fonctions continues de l'intervalle dans $\mathbb{R}$. On munit $P(\mathbb{R})$ et $P(S^1)$ de la topologie de la convergence uniforme.

1. Montrer que les structures de groupe naturelle de $(S^1; \cdot)$ et $(\mathbb{R}, +)$ font de $P(S^1)$ et $P(\mathbb{R})$ des groupes topologiques (où la multiplication est ponctuelle comme dans l'exercice 3).
2. Montrer que l'exponentielle $t \mapsto \exp(it)$ induit un morphisme de groupes topologiques $P(\mathbb{R}) \xrightarrow{e} P(S^1)$ dont l'image est ouverte.
3. Montrer que $P(S^1)$ est connexe et en déduire le théorème de relèvement des angles (on aura le droit de se rappeler qu'un sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est nécessairement fermé).

Autres exercices

Ceux-là arrivent en vrac ! Ils sont aussi (je pense) plus difficiles que les précédents.

³autrement dit selon que D coupe la courbe suivant le sens trigonométrique ou non

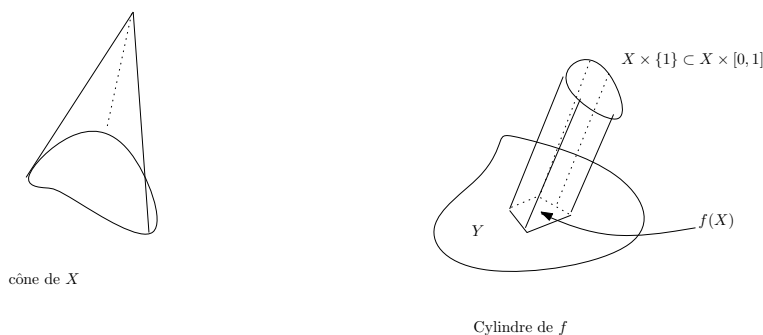


Figure 1: Le cône de X et le cylindre de $f : Y \rightarrow X$

Exercice 9. (Théorème de Borsuk-Ulam en dimension 2)⁴

Ce théorème se formule souvent sous la forme: à tout moment, il existe deux points antipodaux sur la terre sur lesquels la température et la pression sont les mêmes.

Moins prosaïquement, Soit $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application continue. Montrer qu'il existe $(x, y, z) \in S^2$ tel que $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$. (Indication: raisonner par l'absurde et considérer l'application $(x, y, z) \mapsto \frac{f(-x, -y, -z) - f(x, y, z)}{\|f(-x, -y, -z) - f(x, y, z)\|}$).

Exercice 10 (Cylindre et cône d'une application). Le **cylindre de f** est le recollement $Cyl(f) := X \times [0, 1] \cup_{f \times \{0\}} Y$ où $f \times \{0\} : X \times \{0\} \cong X \xrightarrow{f} Y$. Le **cône de f** est le recollement $C(f) := C(X) \cup_{f \times \{0\}} Y$.

1. Montrer que X et Y s'identifient à des sous-espaces fermés de $Cyl(f)$ et décrire le type d'homotopie de $Cyl(f)$.
2. Montrer que si $f_0 : X \rightarrow Y$ et $f_1 : X \rightarrow Y$ sont homotopes, alors $Cyl(f_0)$ est homotope à $Cyl(f_1)$ et $C(f_0)$ est homotope à $C(f_1)$. En déduire que si $\psi : Y \rightarrow Y'$ est une équivalence d'homotopie alors $Cyl(f)$ et $C(f)$ sont respectivement homotopes à $Cyl(\psi \circ f)$ et $C(\psi \circ f)$.

Exercice 11. (Le bonnet d'âne) Soit T un triangle dans $\mathbb{R}^2$ (avec son intérieur) et notons p, q, r ses sommets. On appelle bonnet d'âne le triangle dont on a identifié les arêtes de la façon suivante: $[p, q]$ avec $[q, r]$ et $[p, q]$ avec $[p, r]$. Montrer que le bonnet d'âne est un espace contractile (en l'identifiant au cône d'une application du cercle dans lui-même).

Exercice 12 (Graphes et arbres). On appelle graphe un complexe cellulaire non-vide de dimension (plus petite que) 1 (cf le cours) et arbre un graphe connexe qui n'admet pas de lacets.

1. Montrer qu'un arbre T est contractile et est un rétracte par déformation de n'importe quel sommet (indication: commencer par le faire pour un arbre fini. Puis, si T' est un sous-graphe contractile de T et $\gamma : [0, 1] \rightarrow T$ est une arête telle que $\gamma(0) \in T'$ et $\gamma(1) \in T - T'$, montrer que l'on peut étendre l'homotopie entre T et un de ses sommets à $T \cup_{\gamma(0)} \gamma$).
2. Montrer que tout graphe admet des sous-arbres maximaux (indication: utiliser le lemme de Zorn). Combien y-a-t-il de chemins entre 2 sommets d'un arbre ?
3. Soit G un graphe *connexe* et T un sous-arbre maximal. On note $q : G \rightarrow G/T$ la projection sur le quotient. Montrer que G/T est homéomorphe à un bouquet de cercles: c'est à dire l'espace quotient $(\coprod S^1) / \sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence qui identifie tous les points base des différents cercles (on choisit, arbitrairement, un point base sur chaque cercle).
4. Construire une section $r : G/T \rightarrow G$ de q (Indication: fixer un sommet v_0 dans T et pour toute arête γ dans $G \setminus T$, considérer l'application $t \mapsto c_{\gamma(1)}^{-1} \circ \gamma \circ c_{\gamma(0)}$ où, pour tout sommet $v \in G$, $c_v : [0, 1/3] \rightarrow T$ est une paramétrisation d'un chemin de v_0 à v , c_v^{-1} est le chemin paramétré dans l'autre sens et $\gamma : [1/3, 2/3] \rightarrow G$ une paramétrisation de l'arête γ).
5. Montrer que $G \rightarrow G/T$ est une équivalence d'homotopie. En déduire qu'un graphe est contractile si et seulement si c'est un arbre.

⁴on en verra, en exercice ou en cours, une version plus générale plus tard