Quelques Exercices pour le cours de Topologie Algébrique Élémentaire
Feuille n^{o}2: homotopie, revêtements

Exercices élémentaires :

Ces exercices sont là pour vous aider à vérifier si vous avez (ou non...) assimilé le cours et contiennent des exemples importants !

Quelques exemples et applications de revêtements:

Exercice 1. *(Revêtements sur $\mathbb{C}$)*

1. Déterminer un sous ensemble minimal C de $\mathbb{C}$ tel que la restriction $\sin : \mathbb{C} - \sin^{-1}(C) \to \mathbb{C} - C$ de la fonction sinus $\Big($donnée par $z \mapsto \sin(z) = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}\Big)$ soit un revêtement.
2. Soit $C_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \text{tels que } z_i \neq z_j \text{ pour } i \neq j\}$ et $P_n = \{X \subset \mathbb{C}, \text{ tel que } \mathrm{Card}(X) = n\}$. Montrer que l'application $\phi : C_n \to P_n$ définie par $\phi(z_1, \dots, z_n) = \{z_1, \dots, z_n\}$ est un revêtement.
3. (Polynômes et D'Alembert-Gauss) Soit $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polynôme complexe et $F \subset \mathbb{C}$ l'ensemble de ses valeurs critiques ($F = \{P(w), P'(w) = 0\}$).
   (a) Montrer que $P|_{\mathbb{C}\setminus P^{-1}(F)} : \mathbb{C} \setminus P^{-1}(F) \to \mathbb{C} \setminus F$ est un revêtement de degré $\deg(P)$.
   (b) En considérant une primitive Q d'un polynôme P sans racines complexes, déduire le théorème de D'Alembert-Gauss de la question précédente.

Exercice 2 (Un théorème d'Hadamard[1])**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. On suppose que f est propre et que $df_{(x)}$ est de déterminant non-nul en tout point $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est un revêtement et en déduire que f est un difféomorphisme. Ce résultat reste-t-il vrai avec toute variété à la place de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 3. Soit $p : E \to B$ un revêtement. Montrer que si B est une variété de classe C^n, alors il existe une unique structure de variété C^n sur E telle que p soit de classe C^n.

Exercice 4 (*Groupes et revêtements*)**.**
1. Soit G un groupe topologique et $f : E \to G$ un revêtement simplement connexe et e_0 un point dans la fibre $f^{-1}(\{1\})$ de l'unité de G. Montrer qu'il existe une unique structure de groupe topologique sur E, d'unité e_0 telle que f soit un morphisme de groupes topologiques.
2. Soit H un sous-groupe discret d'un groupe topologique G. Montrer que la projection canonique $G \to G\backslash H$ est un revêtement.
3. *(autour de la bouteille de Klein)* On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$ engendrée par $(x, y) \sim (x + 1, y)$ et $(x, y) \sim (-x, y + 1)$ et on note K le quotient.
   (a) Montrer que K est l'espace des orbites de l'opération sur $\mathbb{R}^2$ d'un sous-groupe de son groupe d'isométries.
   (b) Montrer que K est compact et connexe et que la projection canonique est un revêtement.
   (c) Construire un revêtement à deux feuillets: $S^1 \times S^1 \to K$
   (d) Construire un revêtement à $\mathbb{Z}$ feuillets de M sur K où M est le ruban de Möbius.

Exercice 5. *(autour de $SO(3)$)*

1. *Généralités/Rappels sur les quaternions et S^3:* Soit $\mathbb{H}$ la partie de $M_2(\mathbb{C})$ formée des matrices de la forme $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$. On note

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, si $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, on note $\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$. Montrer les propriétés suivantes:

[1] ce résultat a le droit de vous rappeler un exercice du TD de topologie et calcul différentiel de l'an dernier...

- $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel réel de $M_2(\mathbb{C})$ de base $1, i, j, k$ doublé d'une sous-algèbre.
- Pour tout $q \in \mathbb{H}$ on a $q\overline{q} = |q|^2$. En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps non-commutatif.
- L'application $q \mapsto |q|$ est une norme sur $\mathbb{H}$. La sphère unité de $\mathbb{H}$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$ qui s'identifie à $SU(2)$ et S^3.
- $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{H}$ et c'est son centre.

2. *Revêtement universel de $SO(3)$:*

   (a) Soit $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$ l'application définie par $Q(x, y, z) = xi + yj + zk$. On appelle son image l'ensemble des quaternions purs. Soit $q \in \mathbb{H}^*$ et u un quaternion pur. Montrer que quq^{-1} est un quaternion pur.

   Définissons $\phi_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par $\phi_q(y) = Q^{-1}(qQ(y)q^{-1})$.

   (b) Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ on a $\phi_{\lambda q} = \phi_q$ et que $\phi_q \in SO(3)$. En déduire deux applications

   $$p : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to \mathrm{SO}(3)$$

   Montrer que la première est un morphisme de groupe et un revêtement double et que la deuxième est un homéomorphisme. En déduire que $S^3 \cong SU(2)$ est un revêtement universel de $SO(3)$. Y-a-t'il un rapport entre cette question et la question 1 de l'exercice 4 ?

   (c) Soit $\gamma : [0, \pi] \to S^3$ le chemin donné par $\gamma(t) = \cos(t) + i\sin(t)$. Montrer que la composée $r = p \circ \gamma$ est un lacet de $S0(3)$ qui n'est *pas* homotope à un lacet constant. Identifier géométriquement[2] $r(t) \in SO(3)$. Montrer que la composée de lacets $r \star r$ est homotope au lacet constant $t \mapsto 1_{SO(3)}$.

3. *Revêtement universel de $SO(4)$:* Soit q_1, q_2 deux éléments de $\mathbb{H}^*$. On note $\phi_{q_1,q_2} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ l'application définie par $\phi_{q_1,q_2}(q) = q_1 q q_2^{-1}$. En déduire un morphisme de groupe de $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(4)$. Montrer que le revêtement universel de $S0(4)$ est $S^3 \times S^3$ et que c'est un revêtement à 2 feuillets.

Exercice 6 (*revêtement d'un graphe)*. 1. Montrer que tout revêtement $p : E \to G$ d'un graphe G est un graphe.

2. Quels sont les graphes simplement connexes (resp. 1-connexe) ?

3. (*le revêtement universel du "huit"*) On construit une partie $A_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ de $\mathbb{R}^2$ par récurrence de la manière suivante (voir Figure 1).

   - L'ensemble A_0 est formé du seul point 0.
   - L'ensemble A_1 est formé des 4 segments $[-1, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1, 1]$.
   - On a un graphe formé de 4 arètes, deux horizontales et deux verticales. A distance $1/3$ de l'extrémité libre de chacune, on rajoute le segment de longueur $2/3$ dont l'arète est la médiatrice.
   - Etape n. A distance $1/3^n$ de l'extrémité libre de chaque arête, on ajoute un segment de longueur $2/3^n$ dont notre arête est la médiatrice.

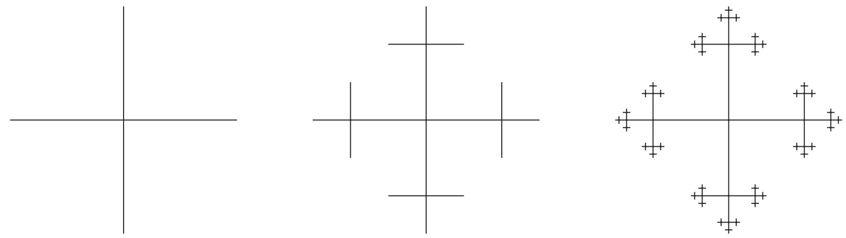
   On construit ainsi une partie de $\mathbb{R}^2$ formée de segments horizontaux et verticaux se coupant orthogonalement. On munit l'ensemble A_∞ de la distance d telle que

   - Chaque arête est isométrique au segment $]0, 1[$.
   - La distance entre deux sommets est la longueur d'un chemin (sans aller-retour) dans A_∞ joignants ces deux sommets.

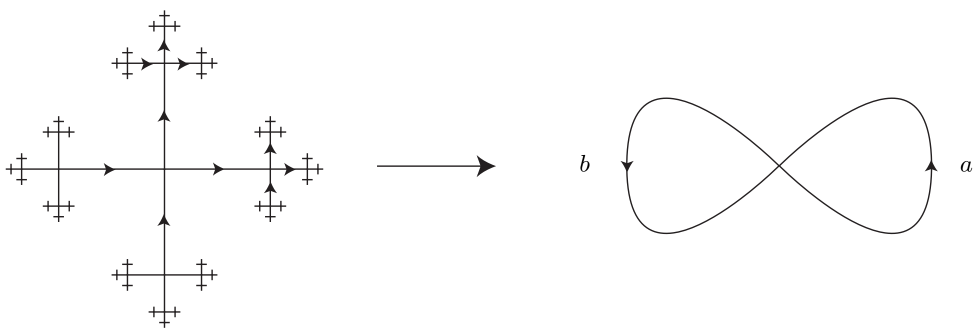
   (a) Montrer que A_∞ muni de la distance d est un espace métrique connexe et simplement connexe.

   (b) On oriente toutes les arètes: les verticales de bas en haut et les horizontales de gauche à droite. On définit une application p de A_∞ sur le huit en envoyant chaque arête horizontale (resp. verticale) sur la boucle a (resp. b) par l'application quotient $[0, 1] \to [0, 1]/(0 \sim 1) \cong S^1$ (voir Figure 2). Montrer que p est le revêtement universel du huit.

[2] c'est à dire son axe et angle...



Étape 1 Étape 2 Étape n



Exercice 7. (*Revêtements et boucles hawaïennes*) On considère les boucles hawaïennes $\mathbb{H} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, c'est à dire la réunion $\mathbb{H} = \bigcup_{n>0} C_n$ des cercles C_n ($n \geq 1$) de diamètre sur l'axe réel $x = 0$ de longueur $1/n$. On note aussi $\mathbb{H}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{H},\, y \geq 0\}$ et $\mathbb{H}_- := \{(x,y) \in \mathbb{H},\, y \leq 0\}$.

1. Démontrer que $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$ sont simplement connexes. $\mathbb{H}$ est-il simplement connexe ? Localement simplement connexe ?

2. Pour tout $n \geq 1$, construire un revêtement $p_n : E_n \to \mathbb{H}$ de $\mathbb{H}$ tel que la restriction $E_{n|C_n}$ ne soit pas trivial.

3. On note $E = \coprod_{n>0} E_n$ la réunion disjointe des E_n et $p : E \to \mathbb{H}$ l'application induite par les p_n. Montrer qu'il existe un revêtement *trivial* T de $\mathbb{H}$ tel que E soit un revêtement de T, mais que E n'est *pas* un revêtement de $\mathbb{H}$.[3]

4. Démontrer que les restrictions $E_{p^{-1}(\mathbb{H}_+)}$ et $E_{p^{-1}(\mathbb{H}_-)}$ sont des revêtements de $\mathbb{H}_+$ et $\mathbb{H}_-$, qui sont de plus triviaux.

Autres exercices

Quelques exercices un peu en vrac dont certains ne sont pas spécialement faciles...

Exercice 8. (*1-connexité des sphères*) Soit $n \geq 2$ et S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ (muni de la norme euclidienne) et $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$ la projection radiale sur la sphère.

1. Soit $\gamma : S^1 \to S^n$ un lacet. Montrer qu'il existe un entier $N > 0$ tel que, pour tout $|t - s| < 1/N$, on ait $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| < 1/2$.

2. En déduire qu'il existe un lacet affine par morceaux $\eta : S^1 \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tel que γ soit homotope (dasn S^n) à $p \circ \eta$.

3. Montrer que S^n est 1-connexe (ou simplement connexe par arcs), c'est à dire[4] que tout lacet est homotope à un lacet constant.

[3] en particulier ce (contre-)exemple montre que la composée de 2 revêtements, n'est pas toujours un revêtement

[4] (car on ne demande pas de démontrer que S^n est connexe par arcs)

Exercice 9 (*homotopie et variétés*)**.** Soit M, N deux variétés lisses[5] de dimension respective m et n. on suppose N compacte

1. Soit A un fermé de M et $f : M \to \mathbb{R}^n$ une application continue dont la restriction $f_{|A} : A \to \mathbb{R}^n$ est lisse[6].

   Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une application $h : M \to \mathbb{R}^n$ lisse vérifiant:

   - $h_{|A} = f_{|A}$
   - $\|f - h\|_\infty \leqslant \epsilon$
   - h est homotope à f relativement à A.

   Indication: on pourra utiliser une partition de l'unité.

2. Soit $f : N \to N$ une application continue et A un fermé de M tel que $f_{|A}$ soit lisse. Montrer qu'il existe une application $h : M \to N$ lisse telle que h soit homotope à f relativement à A et que l'on peut, en outre, imposer à h d'être aussi proche (pour la distance de la convergence uniforme) que l'on souhaite de f.

3. En déduire que S^n est 1-connexe si $n \geq 2$ (on pourra utiliser le lemme de Sard).

Exercice 10 (*simple connexité et 1-connexité*)**.** On identifie $\mathbb{R}^2$ avec le plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$. On considére les boucles hawaïennes D formé par les cercles de $\mathbb{R}^2$ centrés en $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$ et G les boucles hawaïennes formé par les cercles (symétriques aux précédents) formé par les cercles de $\mathbb{R}^2$ centrés en $(-1/n, 0)$ et de rayon $1/n$. On note C^+ le cône de sommet $N = (0, 0, 1)$ de base D (inclus dans la bande $0 \leq z \leq 1$) et C^- le cône de sommet $S = (0, 0, -1)$ de base G (inclus dans la bande $-1 \leq z \leq 0$). Enfin, on note X l'espace topologique $X = C^+ \cup C^-$ réunion des deux cônes.

1. Commencer par faire un dessin de la situation !

2. Montrer que C^+ et C^- sont simplement connexes et 1-connexes (*i.e.* simplement connexes par arcs).

3. Montrer que X est simplement connexe.

4. *(cette question est plus dure...)* Soit $\gamma : [0, 1] \to X$ l'application définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} d_{2p}(t) & \text{si } 1 - \dfrac{1}{2^{2p}} \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{1}{2^{2p+1}} \\ g_{2p+1}(t) & \text{si } 1 - \dfrac{1}{2^{2p+1}} \leqslant t \leqslant 1 - \dfrac{1}{2^{2p+2}} \end{cases}$$

   où d_{2p} décrit le cercle de rayon $1/p+1$ de D (c'est à dire $d_{2p}(t) = \frac{1-\exp(2^{2p+2} i\pi t)}{p+1}$) et g_{2p+1} décrit le cercle de rayon $1/p+1$ de G (c'est à dire $g_{2p+1}(t) = \frac{-1+\exp(2^{2p+3} i\pi t)}{p+1}$).

   Montrer que γ est un lacet bien défini de X (c'est à dire qu'il se prolonge bien au segment $[0, 1]$ tout entier et que ce prolongement défini un lacet C^0) qui n'est pas homotope à un lacet constant. En déduire que X n'est pas 1-connexe.

5. Soit $C^+_{1/2}$ et $C^-_{1/2}$ les intersections de C^+ avec $z \geq 1/2$ et de C^- avec $z \leqslant -1/2$. Soit S le segment reliant $(0, 0, 1/2)$ à $(0, 0, -1/2)$. Soit $Y = C^+_{1/2} \cup S \cup C^-_{1/2}$. Montrer que Y est simplement connexe et 1-connexe.

6. Montrer que l'espace quotient Y/S de Y par S est homéomorphe à X.

7. En déduire que le quotient $p : Z \to Z/A$ d'un espace Z par un sous-espace contractile A n'est pas nécéssairement une équivalence d'homotopie.

[5] c'est à dire de classe C^∞

[6] on rappelle que cela veut dire, qu'il existe une application lisse dans un voisinage de A dont la restriction sur A est $f_{|A}$