Quelques Exercices pour le cours de Topologie Algébrique Élémentaire
Feuille n°3: Groupe fondamental et classification des revêtements

Exercices élémentaires :

Ces exercices sont là pour vous aider à vérifier si vous avez (ou non...) assimilé le cours et contiennent des exemples importants !

Automorphismes et classification de revêtements:

Exercice 1. (*Automorphismes de revêtements*)

1. Déterminer tous les automorphismes du revêtement $S^1 \to S^1$ donné par $z \mapsto z^n$ $(n \geq 1)$. Est-ce un revêtement galoisien ?
2. Montrer que la projection canonique $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$ est un revêtement et calculer son groupe d'automorphismes.
3. Soient X et Y les graphes représentés ci-dessous et $p : X \to Y$ la projection "verticale" donnée par la figure:

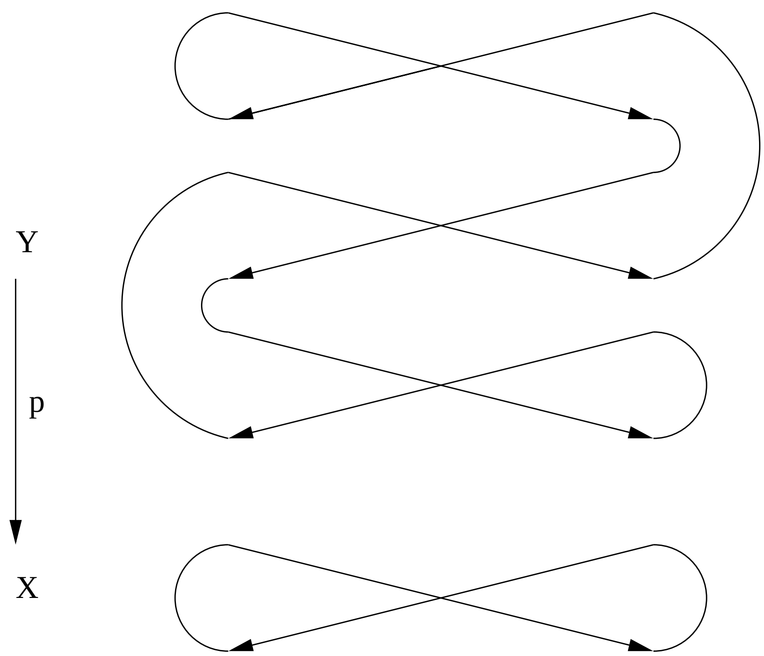

Figure 1: Le revêtement $p : Y \to X$.

(a) Déterminer les automorphismes du revêtement p. Est-ce un revêtement galoisien ?

(b) Construire un revêtement $\widehat{Y}$ de degré 2 de Y tel que $\widehat{Y}$ soit un revêtement galoisien de X et de même, constuire un revêtement $\widehat{X}$ de degré 2 de X tel que $\widehat{Y}$ soit un revêtement galoisien de degré 3 de $\widehat{X}$.

Exercice 2. (*Classifications des revêtements de quelques espaces classiques*) Décrire tous les revêtements (à isomorphisme de revêtements près)

1. de S^1
2. de $\mathbb{R}P^2$
3. de $S^1 \times S^1$
4. de la bouteille de Klein.

5. du graphe en 8, avec 2 et 3 feuillets.

Exercice 3. On considère (la restriction de la) fonction $\sin : \mathbb{C} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C} - \{-1, 1\}$ (rappel: $\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}$).

1. Rappeler[1] pourquoi $\sin : \mathbb{C} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C} - \{-1, 1\}$ est un revêtement.
2. Soit $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C} - \{-1, 1\}$ et $\beta : [0, 1] \to \mathbb{C} - \{-1, 1\}$ les lacets définis par
$$\alpha(t) = 1 - \exp(2i\pi t), \qquad \beta(t) = -1 + \exp(2i\pi t).$$
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ le relévement du lacet composé $\alpha \cdot \beta$ vérifiant $f(0) = 0$ et $g : [0, 1] \to \mathbb{C} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$ le relévement du lacet composé $\beta \cdot \alpha$ vérifiant $g(0) = 0$. Calculer $g(1)$ et $f(1)$ et en déduire que le groupe fondamental de $\mathbb{C} - \{1, -1\}$ n'est pas commutatif.
3. Déterminer le groupe des automorphismes du revêtement $\sin : \mathbb{C} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}) \to \mathbb{C} - \{-1, 1\}$? Est-ce un revêtement galoisien?

Groupes fondamentaux

On pourra attendre d'avoir vu le théorème de Van-Kampen pour répondre à certains de ces exercices.

Exercice 4. Calculer les groupes fondamentaux[2] des espaces de l'exercice 2 et en donner une présentation par générateurs et relations.

Exercice 5. (*suite de l'exercice 3*) Quel est le groupe fondamental de $\mathbb{C} - \{-1, 1\}$? Celui de $\mathbb{C} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$?

Exercice 6. *(points fixes et $\pi_1(S^1)$)* Soit S^1 le cercle unité de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que toute application (continue) de $f : S^1 \to S^1$ qui n'a pas de point fixe est homotope à l'identité, c'est à dire nulle dans $\pi_1(S^1)$.
2. En déduire que toute application de degré non nul a un point fixe.

Exercice 7. Soit G un graphe fini et $x \in G$. Calculer le groupe fondamental de G en fonction du nombre de sommets et d'arètes de G.

Exercice 8. Soit $X = S^2/((0, 0, 1) \sim (0, 0, -1))$ l'espace obtenu en identifiant les pôles nord et sud de la sphère de Riemann S^2. Calculer $\pi_1(X, [(0, 0, 1)])$. Soit S_1, S_2, S_3 3 sphères de dimension 2 plongées dans $\mathbb{R}^3$ et tangentes extérieurement 2 à 2. Soit $x_{12} = S_1 \cap S_2$. Calculer $\pi_1(S_1 \cup S_2 \cup S_3, x_{12})$.

Exercice 9. (*complémentaires de courbes dans* $\mathbb{R}^3$)

1. Soit D, D' deux droites sécantes de $\mathbb{R}^3$ et $x \in \mathbb{R}^3 \setminus (D \cup D')$. Calculer $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus (D \cup D'), x)$.
2. Quel est le groupe fondamental $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$ du complémentaire d'un cercle dans $\mathbb{R}^3$ (construire une rétraction par déformation sur $S^1 \vee S^2$) ? Que peut on dire pour le complémentaire de deux cercles[3] ?

Exercice 10. Soit $\mathbb{H} = \bigcup_{n>0} C_n$ les boucles hawaiennes (cf la feuille de TD précédente; ici C_n est le cercle de centre $(0, 1/n)$ et de rayon $1/n$ dans $\mathbb{R}^2$). Montrer qu'il existe un morphisme de groupe surjectif $\psi : \pi_1(\mathbb{H}, (0, 0)) \to \prod_{n>0} \mathbb{Z}$ (le produit infini de copies de $\mathbb{Z}$) et en déduire qu'il n'est pas dénombrable. Y-a-t'il un isomorphisme de groupe entre $\pi_1(\mathbb{H}, (0, 0))$ et $\pi_1(\bigvee_{n>0} S^1)$?

Exercice 11. Reprendre l'exercice précédent avec $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ à la place de $\mathbb{H}$.

[1] voir la feuille d'exercice précédente
[2] en prenant un point base quelconque
[3] c'est un peu plus dur...

Autres exercices

Quelques exercices un peu en vrac dont certains ne sont pas spécialement faciles...

Exercice 12. Trouver un revêtement du tore à 16 trous sur le tore à 6 trous.

Exercice 13. (*"topologist's sine curve"*) Soit X le sous-espace de $\mathbb{R}^2$ obtenu en considérant la réunion du graphe $G = \{\sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in]0, 1/2\pi]\}$, du segment $\{0\} \times [-1, 1]$ et (du graphe) d'un chemin $c : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ reliant $(0, 0)$ à $(1/2\pi, 0)$ sans rencontrer $G \cup \{0\} \times [-1, 1]$ en dehros de ses extrémités.

1. Faire un dessin de X. Est-il connexe, connexe par arcs, localement connexe par arcs ?
2. Soit $x_0 \in X$. Montrer que $\pi_1(X, x_0) \cong 0$; X est-il simplement connexe par arcs ?
3. Montrer que l'application quotient $p : X \to X/\Big(\{0\}\times[-1, 1]\Big)$ définit une application continue $p : X \to S^1$. Soit $e : \mathbb{R} \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le revêtement exponentiel. Montrer qu'il n'y aucun relèvement $\tilde{p} : X \to \mathbb{R}$ de p.
4. En déduire que X n'est pas simplement connexe[4]. Vérifier que X ne contredit pas les énoncés des théorèmes du relèvement et de simple connexité des espaces simplement connexes par arcs.

Exercice 14. (*Revêtements et $SL_2(\mathbb{Z})$*) Soit A une matrice dans $SL_2(\mathbb{Z})$. Soit T le tore $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Dans la suite on identifie $\mathbb{R}^2$ à l'espace vectoriel des vecteurs colonnes.

1. Montrer que l'application $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $x \mapsto Ax$ induit un homéomorphisme ϕ_A de T sur lui même.
2. Soit $V = \mathbb{R}\times T$ et C_A le groupe engendré par l'homéomorphisme $g_A : (t, x) \in \mathbb{R}\times T \mapsto (t+1, Ax) \in \mathbb{R}\times T$.
   (a) Montrer que l'application quotient $V \to V/C_A$ est un revêtement.
   (b) Identifier V/C_{Id}. Quel est son groupe fondamental ?
   (c) On suppose désormais $A \neq \mathrm{Id}$. Montrer que le groupe fondamental de V/C_A n'est pas commutatif et en déduire que V/C_A n'est pas isomorphe au tore $S^1 \times S^1 \times S^1$ de dimension 3.
3. Soit X_A le quotient $[0, 1] \times T/\big(\phi_A(x), 1\big) \sim (x, 0)$.
   (a) Montrer que X est une variété compacte de dimension 3.
   (b) Montrer que le revêtement universel de X_A est $\mathbb{R}^3$ (on pourra considérer le sous-groupe G_A des transformations affines de $\mathbb{R}^3$ engendré par les applications $\tau_1 : Y \mapsto Y + e_1$, $\tau_2 : Y \mapsto Y + e_2$ et $\tau_A : Y \mapsto \tilde{A}Y + e_3$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$).
   (c) Montrer que X_A est homéomorphe à X_B si et seulement si B est conjuguée à A ou A^{-1} dans $GL_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 15. Soit $T = S^1 \times S^1$ un Tore et $X = S^1 \times D^2$ le tore plein. on dit qu'un homéomorphisme $\phi : T \to T$ du tore T sétend en un homéomorphisme du Tore plein, s'il existe $\psi : X \to X$, homéomorphisme tel que $\psi_T = \phi$.

1. Déterminer une condition nécéssaire en terme de groupe fondamental $\pi_1(T, (0, 0))$ du tore, pour qu'un homéomorphisme ϕ du tore s'étende à X.
2. Déterminer les isomorphismes de groupe topologiques du Tore et en déduire de la question précédente une CNS pour qu'un isomorphisme de Tore sétende en un homéomorphisme de X.

Exercice 16. (*théorème de Kurosh*) Soit $G = \star_i G_i$ le produit libre d'une famille (finie) de groupes G_i. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que $H = \Big(\star_{j\in J\subset I} H_j\Big) \star F$ où J est un sous-ensemble de I, H_j est conjugé à un sous-groupe de g_j et F est un groupe libre (on pourra introduire un espace topologique dont le groupe fondamental est G...)

[4] au sens du cours, c'est à dire admet des relèvements non-triviaux