Quelques Exercices pour le cours de Topologie Algébrique Élémentaire
Quelques exercices sur l'homotopie supérieure, les CW-complexes ou éludés en cours...

Exercice 1 (*Van Kampen pour les recouvrements infinis*)**.** Soit X un espace connexe par arcs, $x_0 \in X$ et $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts connexes par arcs contenant x_0. On suppose de plus que $\mathcal{U}$ est stable par intersections finies (c'est à dire $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n} \in \mathcal{U}$ pour tout n, $i_1, \ldots, i_n \in I$).

1. Rappeler pourquoi il y a un morphisme de groupe naturel
$$\lim_{\substack{\to \\ U_i \in \mathcal{U}}} \pi_1(U_i, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0). \tag{1}$$
2. On veut montrer que le morphisme (1) ci-dessus est un isomorphisme. On admettra que c'est vrai si I est fini (cela a été vu en cours). On note F l'ensemble des sous-ensembles *finis* de $\mathcal{U}$ qui sont stables par intersection finies.
   (a) Soit $\mathcal{O} \in F$ et $X_{|\mathcal{O}} = \bigcup_{O\in\mathcal{O}} O \subset X$. Montrer que $\lim\limits_{\substack{\to \\ O \in \mathcal{O}}} \pi_1(O, x_0) \longrightarrow \pi_1(X_{|\mathcal{O}}, x_0)$ est un isomorphisme de groupes.
   (b) On munit F d'un ordre partiel par $\mathcal{O} \leq \mathcal{O}'$ si $X_{|\mathcal{O}} \subset X_{|\mathcal{O}'}$. Montrer (en utilisant la compacité de $[0, 1]$) qu'il y a un isomorphisme de groupes naturel
$$\lim_{\substack{\to \\ \mathcal{O} \in F}} \pi_1(X_{|\mathcal{O}}, x_0) \xrightarrow{\simeq} \pi_1(X, x_0).$$
   (c) En déduire que le morphisme (1) est un isomorphisme.

Fibrations et cofibrations:

Exercice 2 (*Généralités sur les fibrations* (de Hurewicz))**.** 1. Montrer que la composée de 2 fibrations est une fibration (quid de ce résultat pour un revêtement ?)

2. Soit $p : E \to B$ une fibration et $f : X \to B$ une application continue. Est-ce que le tiré en arrière $\mathrm{Id} \times_B p : X \times_B E \to X$ est une fibration ?
3. Soit $p : E \to B$ une fibration avec B connexe par arcs.
   (a) *(Invariance homotopique des fibres)* Soit $\gamma : [0, 1] \to B$ un chemin entre 2 points b_0, b_1 de B. Montrer qu'il existe un relèvement continu $\tilde{\gamma} : p^{-1}(b_0) \times I \to E$ tel que, pour tout $t \in I$, $\tilde{\gamma}(-, t) \in p^{-1}(\gamma(t))$. On notera $f_\gamma : p^{-1}(b_0) \to p^{-1}(\beta_1)$ l'application $\tilde{\gamma}(-, 1)$.
   (b) Montrer que si le chemin γ est homotope à un chemin β (à extrémités fixées), alors f_γ est homotope à f_β (on pourra remarquer que la paire $(I^2, I \times \{0\})$ est homéomorphe à la paire $(I^2, I \times \partial I \cup \{0\} \times I)$).
   (c) En déduire que 2 fibres de p sont homotopes. Essayer de trouver dans quelle mesure ces homotopies sont naturelles.

Exercice 3 (*Généralités sur les cofibrations*)**.** Pour tout espace topologique X, on note $X^I = \{f : [0, 1] \to X\}$ l'espace des applications continues de I dans X (muni de la topologie compacte ouverte) et $ev_0 : X^I \to X$ l'application $f \mapsto f(0)$ d'évaluation en 0. Une application continue $i : A \to X$ est appelée une *cofibration* si elle satisfait la propriété *HEP*[1] suivante: pour tout carré commutatif (où f, h sont donnés)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "i"'] & Y^I \arrow[d, "ev_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"] & Y \end{tikzcd} \tag{2}$$

[1]pour Homotopy Extension property

il existe une application pointilée $\tilde{h} : X \to Y^I$ qui rende le diagramme commutatif. Attention on ne suppose pas $\tilde{h}$ unique (et en général elle ne l'est pas).

1. Montrer que la propriété *HEP* est équivalente à l'existence d'une application pointillée $\tilde{H} : X \times I \to Y$ qui laisse les diagrammes suivants commutatifs[2]

$$\begin{tikzcd}
A \times \{0\} \arrow[rr] \arrow[dd, "i\times \mathrm{Id}"'] & & A \times I \arrow[dl] \arrow[dd, "i\times \mathrm{Id}"] \\
& Y & \\
X \times \{0\} \arrow[ur] \arrow[rr] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "\tilde{H}"]
\end{tikzcd}$$

2. Montrer qu'une inclusion $A \hookrightarrow X$ est une cofibration ssi $A \times I \cup X \times \{0\}$ est un rétracte de $X \times I$. En déduire que pour tout CW-complexe X et sous-complexe A, l'inclusion $A \hookrightarrow X$ est une cofibration.

3. Soit $i : A \to X$ une cofibration et $f : A \to B$ une application continue. Montrer que l'application canonique $B \stackrel{\mathrm{Id}\cup_f i}{\longrightarrow} B \cup_f X$ est une cofibration.

4. Soit $f : X \to Y$ une application continue et $Cyl(f)$ le "cylindre" de f. Montrer qu'il y a une factorisation de f sous la forme $f : X \to Cyl(f) \to Y$ telle que la première application soit une cofibration et la dernière une équivalence d'homotopie.

5. Soit $i : A \to X$ une cofibration. Montrer que, pour tout espace Z, l'application induite $Z^X \to Z^A$ (par précomposition avec i) est une fibration.

Exercice 4 (*Path and based Loop spaces*)**.** Soit X un espace topologique et x_0 un point base. On note $\Omega X = \{f : S^1 \to X,\ f(1) = x_0\}$ l'espace des lacets pointés (muni de la topologie compacte-ouverte), son esapce des lacets pointés. On note aussi $PX = \{f : [0,1] \to X,\ f(0) = x_0\}$ son espace des chemins (muni de la topologie compacte-ouverte). Enfin on notera simplement x_0 le lacet constant.

1. Montrer que, pour tout $i \geq 1$,
$$\pi_i(X, x_0) \cong \pi_{i-1}(\Omega X).$$
Que valent les groupes d'homotopie $\pi_i(PX, x_0)$?

2. Soit $p : PX \to X$ l'application d'évaluation en 1: $p(f) = f(1)$. Montrer que $p : PX \to X$ est continue et que, si X est connexe par arcs, c'est une fibration de fibre ΩX (on pourra utiliser la dernière question de l'exercice précédent).

3. Montrer que toute application continue $f : X \to Y$ se factorise sous la forme $X \to E \to Y$ où la première application est une équivalence d'homotopie et la deuxième une fibration (on pourra considérer un tiré en arrière de PY).

Exercice 5 (*Quotient par une cofibration*)**.** Soit $A \subset X$ un sous-espace fermé. On suppose de plus que l'inclusion $i : A \hookrightarrow X$ est une cofibration.

1. Soit $C(i)$ le cône de l'application $i : A \to X$ et $C(A)$ le cône de A. Montrer que $C(i) = X \cup C(A)$ et que $C(i)/C(A)$ est canoniquement homéomorphe à X/A. On note $q : C(i) \to X/A$ l'application de passage au quotient ainsi obtenue.

2. Montrer que $q : C(i) \to X/A$ est une équivalence d'homotopie.

3. Montrer que l'application naturelle $(X, A) \to (X/A, *)$ induit des isomorphismes
$$H_i(X, A) \cong H_i(X/A, *) \cong H_i(X/A)$$
en homologie si $i > 0$. Que se passe-t-il si $i = 0$?

[2](pour Y quelconque)

Groupes d'homotopie supérieurs

Exercice 6 (*La longue suite exacte d'une fibration*)**.** Soit $p : E \to B$ une fibration (avec B connexe par arcs) et e_0, b_0 des points bases. On note F la fibre au dessus du point base b_0. On admettra que les inclusions évidentes induisent une longue suite exactes de groupes[3] d'homotopie (dont le point base est pris en e_0 ou b_0)

$$\ldots \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \cdots \to \pi_1(B) \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \{1\}.$$

1. Montrer que si $p : E \to B$ est un revêtement, alors $\pi_n(E) \cong \pi_n(B)$ pour tout $n \geq 2$.
2. Calculer les groupes d'homotopie du cercle S^1.

Exercice 7. Soit S^n la sphère de dimension n.

1. Montrer que toute application continue de $S^i \to S^j$ est homotope à une application C^∞.
2. En utilisant le lemme de Sard, en déduire que $\pi_i(S^n) = 0$ si $i < n$.
3. Montrer que le degré (au sens de l'homologie) définit un morphisme de groupe $\pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$, qui est de plus surjectif.
4. On veut montrer que si $f, g : S^n \to S^n$ sont des applications de même degrés, alors f est homotope à g.
   (a) Montrer qu'il suffit de supposer que f, g sont de classe C^∞.
   (b) En utilisant le lemme de Sard, montrer qu'il existe un point $x \in S^n$ et un voisinage ouvert U de x, tel que $f^{-1}(U)$ soit une réunion finie disjointe d'ouverts $U_1, \ldots, U_m$ difféomorphes à U. Montrer qu'on peut supposer que le point base est dans le complémentaire de U. On note $i(f,x) = \sum_{i=1}^m ind(U_i, f, x)$ où $ind(U_i, f, x) = 1$ si $f_{|U_i} : U_i \to U$ préserve l'orientation et -1 si $f_{|U_i}$ inverse l'orientation.
   (c) Montrer que f est homotope à l'application $\tilde{f}$ obtenue en envoyant le complémentaire de $\coprod_{i=1}^n U_i$ sur le point base. En déduire que le degré de f est donné par $i(f,x)$.
   (d) Montrer que si U_i, U_j sont d'indices opposés et que c est un chemin reliant U_i à U_j (sans passer par les autres U_k), $\tilde{f}$ est homotope à une application $\tilde{g}$ qui envoie U_i, U_j, c et le complémentaire des U_k sur le point base. (Remarque: ces deux dernières questions géométriques ne sont pas faciles et peuvent être admises).
   (e) En déduire que $deg(f) = deg(g)$ implique f est homotope à g.
5. En déduire que $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.
6. Rappeler pourquoi $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ et en déduire une fibration $S^3 \to S^2$ de fibre S^1 (appelée fibration de Hopf). Montrer que $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

[3] les deux derniers termes ne sont que des ensembles, mais on étend la notion d'exactitude de manière évidente dans ce cas