Exercices de Topologie Algébrique Élémentaire
Feuille 4: (co)Homologie

Préliminaire sur les complexes de chaines

Les exercices suivants sont de grands classiques à connaitre (enfin surtout leurs résultats) sur la manipulation des complexes de chaines...

Exercice 1. (1) Soit $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M" \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathbb{Z}$-modules finis. Montrer que $\#M = \#M' * \#M"$ où $\#M$ désigne le cardinal de M.

(2) Déterminer l'ensemble des $\mathbb{Z}$-modules M tels qu'il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Toutes les suites exactes ainsi obtenues sont-elles scindées ? Que se passe-t-il si on considère des suites exactes de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-modules ?

Exercice 2. On considère une longue suite exacte

$$0 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \longrightarrow 0$$

de k-espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\sum_{i\geq 0} \dim(M_{2i}) = \sum_{i\geq 0} \dim(M_{2i+1}).$$

Exercice 3. (Lemme des 5) Considérons le diagramme commutatif de A-modules :

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & M_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & M_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & M_5 \arrow[d, "f_5"] \\
N_1 \arrow[r, "\beta_1"'] & N_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & N_3 \arrow[r, "\beta_3"'] & N_4 \arrow[r, "\beta_4"'] & N_5
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont des suites exactes. Montrer que :

(1) si f_1 est surjective et f_2 et f_4 injectives, alors f_3 est injective.

(2) si f_5 est injective et f_2 et f_4 surjectives, alors f_3 est surjective.

Remarquons que ce lemme est utilisé souvent de la manière suivante **(à retenir)** :

(3) Si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Exercice 4 (Lemme du Serpent)**.** Soit A un anneau. On considère le diagramme commutatif de complexes de A-modules :

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"] & M'' \arrow[d, "d''"] \\
N' \arrow[r, "v"] & N \arrow[r, "q"] & N''.
\end{tikzcd} \tag{0.1}$$

En particulier $p \circ u = 0 = q \circ v$.

(1) Montrer que u, p et v, q induisent des applications linéaires naturelles $\tilde{u} : \ker d' \to \ker d$, $\tilde{p} : \ker d \to \ker d''$, $\bar{v} : \operatorname{coker} d' \to \operatorname{coker} d$ et $\bar{q} : \operatorname{coker} d \to \operatorname{coker} d''$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\ker d' \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, hook, "i'"] & \ker d \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, hook, "i"] & \ker d'' \arrow[d, hook, "i''"] \\
M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "p"] & M''
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"] & N'' \arrow[d, "\pi''"] \\
\operatorname{coker} d' \arrow[r, "\bar{v}"] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\bar{q}"] & \operatorname{coker} d''
\end{tikzcd}$$

(2) Montrer que $\tilde{p} \circ \tilde{u} = 0$ et que $\bar{q} \circ \bar{v} = 0$.

(3) Montrer que si u est injective alors $\tilde{u}$ l'est aussi.
Montrer que si q est surjective alors $\bar{q}$ l'est aussi.

(4) Montrer que si $\ker p = \operatorname{im} u$ et si v est injective alors $\ker \tilde{p} = \operatorname{im} \tilde{u}$.
Montrer que si $\ker q = \operatorname{im} v$ et si p est surjective alors $\ker \bar{q} = \operatorname{im} \bar{v}$.

(5) On suppose maintenant que le diagramme (0.1) est exact (c'est à dire $\ker p = \operatorname{im} u$ et $\ker q = \operatorname{im} v$) et que, de plus, v est injective et p surjective. Montrer alors qu'il existe une application linéaire naturelle $\delta : \ker d'' \to \operatorname{coker} d'$ et que la suite

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\tilde{u}} \ker d \xrightarrow{\tilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\bar{q}} \operatorname{coker} d'' \longrightarrow 0$$

est exacte.

En pratique l'énoncé (5) est très utile. On l'utilise le plus souvent sous la forme suivante qu'il faut **impérativement retenir**: étant donné un diagramme commutatif de A-modules

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] & N \arrow[r, "q"] & N'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont des suites exactes, on peut compléter de façon naturelle ce diagramme pour obtenir le suivant, appelé diagramme du serpent :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \ker d' \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "i'"'] & \ker d \arrow[r, "\tilde{p}"] \arrow[d, "i"'] & \ker d'' \arrow[d, "i''"'] \arrow[dddll, rounded corners, "\delta"] & \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "d'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "d"'] & M'' \arrow[r] \arrow[d, "d''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\pi'"'] & N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\pi"'] & N'' \arrow[r] \arrow[d, "\pi''"'] & 0 \\
 & \operatorname{coker} d' \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d \arrow[r, "\bar{q}"] \arrow[d] & \operatorname{coker} d'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

et dans lequel :

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\tilde{u}} \ker d \xrightarrow{\tilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\bar{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\bar{q}} \operatorname{coker} d'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte.

(6) *(Une application importante)* Déduire des questions précédentes que, pour toute suite exacte de complexes de chaines (de A-modules)

$$0 \to (C'_\bullet, d') \xrightarrow{f} (C_\bullet, d) \xrightarrow{g} (C"_\bullet, d") \to 0$$

il existe une longue suite exacte *naturelle* de A-modules

$$\dots \to H_n(C') \xrightarrow{f} H_n(C) \xrightarrow{g} H_n(C") \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C') \xrightarrow{f} H_{n-1}(C) \to \dots$$
$$\dots \to H_1(C) \xrightarrow{g} H_1(C") \xrightarrow{\delta} H_0(C') \xrightarrow{f} H_0(C) \xrightarrow{g} H_0(C") \to 0.$$

Exercices élémentaire sur l'homologie

Vérifier bien que vous arrivez à faire les exercices suivants...

Exercice 5. Soit X l'espace topologique formé de la réunion des arêtes d'un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$ Soit G un groupe abélien. Calculer les groupes d'homologie $H_\bullet(X, G)$ ainsi que le groupe fondamental de G en un un de ses sommets..

Exercice 6. Soit $\omega = \exp(2i\pi/3) \in \mathbb{C}$, X_1 l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du triangle de sommets 1, ω et ω^2, X_2 l'espace topologique formé de la réunion des arêtes du triangle de sommets -1, $-\omega$ et $-\omega^2$, et $X = X_1 \cup X_2$. Calculer les groupes d'homologie de X à coefficient dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 7 (L'homomorphisme de Hurewicz en degré 1). Soit X un espace connexe par arcs et x_0 un point base de X. Si $f, g : [0,1] \to X$ sont des chemins (continus) tels que $f(1) = g(0)$, on peut définir leur composition $f \star g : [0,1] \to X$ (comme dans le groupoide fondamental) par

$$f \star g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & \text{si } t \geq 1/2. \end{cases}$$

On notera $f^{-1} : t \mapsto f(1-t)$ le chemin f parcouru dans le sens inverse. On identifiera un chemin $f : [0,1] \to X$ avec le simplexe qu'il définit dans $C_1(X)$.

1. Soient $f, g : \Delta^1 \to X$ deux 1-simplexes tels que $f(1) = g(0)$. Montrer que $f \star g - f - g \in C_1(X)$ est un bord (c'est à dire dans l'image de $d : C_2(X) \to C_1(X)$.)
2. Montrer que tout lacet constant est un bord et que $f + f^{-1}$ est un bord pour tout chemin f.
3. Montrer que si f, g sont deux chemins ayant mêmes extrêmités et homotopes (relativement à leurs extrémités), alors $f - g \in C_1(X)$ est un bord. En déduire que l'application qui identifie un chemin $f : [0,1] \to X$ avec un simplexe induit un morphisme de groupes $\psi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$. Ce morphisme est appelé morphisme de Hurewicz.
4. Montrer que ψ se factorise sous la forme $\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)_{ab} \to H_1(X)$ où $\pi_1(X, x_0)_{ab} = \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ est l'abélianisé du groupe fondamental.
5. Soit $f : [0,1] \to X$ un 1-simplexe. Soit $c_0, c_1 : [0,1] \to X$ deux chemins relaint respectivement le point base x_0 à $f(0)$ et $f(1)$. Montrer que l'application $f \mapsto (c_0 \star f) \star c_1^{-1}$ induit un morphisme de groupe $\phi : C_1(X) \to \pi_1(X, x_0)_{ab}$.
6. Montrer que $\psi \circ d(\sigma) = 1$ (pour tout $\sigma \in C_2(X)$).
7. (*cette question est plus dure*) En déduire l'isomorphisme d'Hurewicz suivant:

$$\pi_1(X, x_0)_{ab} \cong H_1(X)$$

Exercice 8 (**Espaces projectifs complexes).** L'espace projectif complexe de dimension n est le quotient $\mathbb{C}P_n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\mathbb{C} - \{0\} \cong S^{2n+1}/S^1$. On note $[z_0, \ldots, z_n]$ la classe de $[z_0, \ldots, z_n] \neq 0$ dans $\mathbb{C}P_n$. Par définition $[z_0, \ldots, z_n] = [\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Les inclusions canoniques $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^i = \mathbb{C}^{n+i}$ induisent des morphismes continus $\mathbb{C}P_n \to \mathbb{C}P_{n+i}$. on notera $p : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{C}P_n$ la projection canonique.

(1) Montrer que pour tout $k = 1 \ldots n$, le sous-ensemble $U_k = \{[z_0, \ldots, z_n] \mid z_k \neq 0\}$ est ouvert et homéomorphe à $\mathbb{C}^n$. Montrer que $\mathbb{C}P_n - U_n \cong \mathbb{C}P_{n-1}$.

(2) Soit $f : D^{2n} \to \mathbb{C}P_n$ l'application $(z_0, \ldots, z_{n-1}) \mapsto \left[z_0, \ldots, z_{n-1}, \sqrt{1 - (|z_0|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2)}\right]$. Montrer que $f(\partial(D^{2n})) \subset \mathbb{C}P_n - U_n$ et que $f_{|D^{2n} - \partial(D^{2n})}$ est injective à valeur dans U_n. On note $f_0 = f_{|\partial(D^{2n})} : \partial(D^{2n}) \to \mathbb{C}P_n - U_n \cong \mathbb{C}P_{n-1}$. Montrer que f_0 est surjective.

(3) En déduire une structure de CW complexes avec n-cellules sur $\mathbb{C}P_n$.

(4) En déduire les groupes d'homologie $H_\bullet(\mathbb{C}P_n)$ (à coefficient dans $\mathbb{Z}$).

(5) Quelle est l'homologie de $\mathbb{C}P_\infty = \bigcup \mathbb{C}P_n$ (pour la topologie de la réunion) ?

Exercice 9. Soit D^1, le disque fermé (dans $\mathbb{R}^2$) de bord S^1 et soit $S^1 \times D^1$ le tore plein que l'on pourra considéré comme plongé dans $\mathbb{R}^3$. Considérons quatre points distincts $\{a, b, c, d, \}$ de S^1 et posons $X = S^1 \times S^1 \cup \{a, b, c, d\} \times D^1$. Autrement dit, X est l'espace obtenu en collant quatre disques disjoints dans le tore T_2.

(i) Calculer pour tout i les groupes $H_i(X; k)$.

(ii) Soit $\{p\}$ un point de X n'appartenant à aucun des cercles $\{x\} \times S^1$, $x = a, b, c, d$. Calculer $H_i(X - \{p\};)$.

(iii) Soit $e \in S^1$ avec $e \neq a, b, c, d$. On considère les applications suivantes de S^1 dans X:

$$f_1 : p \mapsto (a, p), \qquad f_2 : p \mapsto (e, p).$$

Calculer les applications $f_{i*} : H_1(X; k_X) \longrightarrow H_1(S^1)$ pour $i = 1, 2$.

Exercice 10. On considère trois sphères de Riemann S_1, S_2 et S_3 plongées dans $\mathbb{R}^3$. On suppose qu'elles sont deux à deux tangentes extérieurement et on note $x_{ij} = S_i \cap S_j$. Soit $X = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

(1) Calculer la cohomologie $H^i(X, \mathbb{Z})$.

(2) Calculer le groupe fondamental $\pi_1(X, x_{ij})$ (on pourra utiliser Van Kampen).

Quelques applications classiques des groupes d'homologie

Exercice 11 (**Théorèmes de séparation de Jordan généralisés).** Dans ce qui suit on considère les groupes d'homologie d'un espace X à coefficient dans $\mathbb{R}$ (qu'on oublie dans les notations).

(1) Soit $f : D^r \to S^n$ une application injective qui est un homéomorphisme sur son image. Montrer que $H_\bullet(S^n - f(D^r)) \cong H_\bullet(\{*\})$ et en déduire que $S^n - f(D^r)$ est connexe (on pourra raisonner par récurrence, écrire $D^n \cong D^{n-1} \times I$ et considérer les fermés $D^{n-1} \times [0, 1/2]$ et $D^{n-1} \times [1/2, 1]$).

(2) Soit $f : S^r \to S^n$. Montrer que $H_\bullet(S^n - f(S^r)) \cong H_\bullet(S^{n-r-1})$ si $r < n$.

(3) En déduire que si $r = n - 1$, alors $S^n - f(S^{n-1})$ a exactement deux composantes connexes qui sont acycliques et dont les bords sont exactement $f(S^{n-1})$.

(4) Déduire de **(2)** que si $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ est une immersion avec $n \geq 2$, alors $\mathbb{R}^n - f(S^{n-1})$ a deux composantes connexes. De plus une d'entre elle est bornée et acyclique et l'autre est non-bornée.

Exercice 12 (**Théorème de Borsuk-Ulam).** On note encore S^n la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ (on suppose $n \geq 1$). L'application *antipodale* $a : S^n \to S^n$ est l'application $x \mapsto -x$ (c'est bien sur la symétrie par rapport au centre de la sphère). Cette application induit donc une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur S^n. L'espace quotient $S^n/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est (par définition) l'espace projectif réel de dimension n, noté $\mathbb{R}P_n$. En particulier la projection $p : S^n \to \mathbb{R}P_n$ est un revêtement à 2 feuillets.

(1) Rappeler pourquoi tout simplexe $\tilde{\sigma} : \Delta^k \to \mathbb{R}P_n$ peut être relèver en exactement 2 simplexes $\sigma : \Delta^k \to S^n$ et $\tau \cdot \sigma : \Delta^k \to S^n$.

(2) On note $t : C_\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to C_\bullet(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'application linéaire $\tilde{\sigma} \mapsto \sigma + \tau \cdot \sigma$ (appelée transfert). Montrer que t est un morphisme de complexes de chaines et en déduire une suite exacte courte de complexes de chaines de la forme

$$0 \to C_\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{t} C_\bullet(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xrightarrow{p_*} C_\bullet(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0.$$

(3) En déduire une suite exacte longue en homologie

$$0 \leftarrow H_0(\mathbb{R}P_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{p_*} H_0(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{t} H_0(\mathbb{R}P_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leftarrow H_1(\mathbb{R}P_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{p_*} H_1(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leftarrow \dots$$
$$\dots \leftarrow H_{n-1}(\mathbb{R}P_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leftarrow H_n(\mathbb{R}P_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{p_*} H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \xleftarrow{t} H_n(\mathbb{R}P_n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \leftarrow 0.$$

(4) Montrer que $t \circ p_* : H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to H_n(S^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est l'application nulle. En déduire que dans la suite exacte de la question **(3)**, les flèches sont alternativement un isomorphisme et 0.

(5) Montrer que si $f : S^n \to S^m$ vérifie $f \circ a = a \circ f$, alors $n \leq m$ (on pourra utiliser la naturalite de la longue suite exacte)

(6) Borsuk-Ulam : En déduire que pour tout $f : S^n \to \mathbb{R}^n$. Il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = f(-x)$. C'est le Théorème de Borsuk-Ulam

(7) Applications : i) Montrer qu'à tout instant, il y a deux points antipodaux à la surface de la terre où et la température et la pression atmosphérique sont les mêmes.

ii) Soient $A_1, \dots A_m$ des sous-ensembles mesurables (au sens de Lebesgue) de $\mathbb{R}^m$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine de $\mathbb{R}^m$ qui divise chauqe A_i en deux parties égales. En déduire qu'on peut diviser, en un seul coup de couteau, un sandwich au jambon en deux parties avec exactement les mêmes quantités de pain et de jambon...

Exercice 13 (**Degré d'une application).** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[S^n]$ un générateur du $\mathbb{Z}$-module $H_n(S^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

(1) Soit $f : S^n \to S^n$ une application continue. Montrer qu'il existe un un unique entier $\deg(f)$ tel que $f_*([S^n]) = \deg(f)[S^n]$. On appelle cet entier le degré de f. Est-ce que cette définition est en accord avec celle déjà vue en cours dans le cas $n = 1$? Quel est le degré de l'application antipodale $x \mapsto -x$?

(2) **(Structures de groupes sur les sphères)** On va montrer qu'il n'y a pas de structures de groupe topologique sur les sphères S^{2n} pour $n > 0$. On note w_n le dual de Poincaré du générateur de $H_0(S^n)$.

i) Montrer que $H^k(S^m \times S^m) \cong \bigoplus_{i+j=k} H^i(S^m) \otimes H^j(S^m)$ et que pour toute application $\mu : S^m \times S^m \to S^m$, il existe $\deg_1(\mu), \deg_2(\mu) \in \mathbb{Z}$ tels que $\mu_*(w_n) = \deg_1(\mu) w_n \otimes 1 + \deg_2(\mu) 1 \otimes w_n$.

ii) Montrer que si $\mu : S^m \times S^m \to S^m$ admet une unité, alors $\deg_1(\mu) = \deg_2(\mu) = 1$.

iii) En utilisant que $w_n \cup w_n = 0$, montrer que $\deg_1(\mu) \deg_2(\mu) = 0$ si n est pair (on pourra utiliser que le cup-produit est gradué commutatif).

iv) Conclure.

(3) Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le seul groupe qui peut agir librement sur S^n si n est pair.

Exercice 14 (*une application non triviale en homologie modulo k*)**.** Soit $k \geq 2$ un entier et $f : S^n \to S^n$ l'application définie comme la composée $f : S^n \to \bigvee_{i=1}^{k} S^n \to S^n$ (où la première application est obtenue en pinçant successivement $k-1$-fois une sphère en son équateur et la deuxième est l'identité sur chaque sphère du bouquet $\bigvee_{i=1}^{k} S^n$). On note $X = S^n \cup_f D^{n+1}$ le CW-complexe obtenu en recollant une cellule de dimension $n+1$ sur S^n suivant $f : \partial D^{n+1} \cong S^n \to S^n$. On note $p : X \to X/S^n$ l'application quotient.

1. Montrer que f est de degré k et que X/S^n est homéomorphe à S^{n+1}.
2. Montrer que l'application $p_* : H_m(X, \mathbb{Z}) \to H_m(S^{n+1}, \mathbb{Z})$ induite en homologie (à coefficient dans $\mathbb{Z}$) est nulle pour tout m.
3. Montrer que n $p_* : H_m(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \to H_m(S^{n+1}, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ induite en homologie (à coefficient dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$) *n'est pas* nulle pour tout m et en déduire que p n'est pas homotope à une application constante.