Exercices de Topologie Algébrique Élémentaire
Feuille 5: (co)Homologie cellulaire

Exercices élémentaires

Les exercices suivants sont de grands classiques à connaitre (enfin surtout leurs résultats) sur la manipulation des complexes de chaines...

Exercice 1 (**Espaces projectifs**). L'espace projectif complexe de dimension n est le quotient $\mathbb{C}P_n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}/\mathbb{C} - \{0\} \cong S^{2n+1}/S^1$. L'espace projectif réel est le quotient $\mathbb{R}P^n = S^n/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

(1) Rappeler les structures de CW-complexes de $\mathbb{C}P_n$ et $\mathbb{R}P^n$.

(2) Calculer l'homologie (cellulaire) $H_k(\mathbb{C}P_n, G)$ pour tout groupe abélien G (ainsi que dans le cas $n = \infty$).

(3) Soit k un corps; calculer les groupes d'homologie $H_i(\mathbb{R}P^n, k)$ selon la caractéristique de k.

(4) Vérifier que la caractéristique d'Euler-Poincaré est indépendante du corps de base dans les cas précédents.

5) Quelle est l'homologie des espaces projectifs quaternioniques ?

Exercice 2 (**quelques surfaces**). **1)** Calculer l'homologie (à coefficient dans $\mathbb{Z}$) de la bouteille de Klein.

2) Calculer l'homologie (cellulaire) d'un tore à g trous (*i.e.* la surface obtenue par somme connexes de g tores).

3) Calculer l'homologie (cellulaire) de l'espace X obtenu comme l'union de la sphère unité S^2 et du segment rejoignant les pôles nord et sud.

4) Soit X le CW-complexe obtenu en recollant une 2-cellule sur un cercle via une application de degré 2 et une autre 2-cellule par une application de degré 3. Quelle est l'homologie de X ?

Exercice 3. Soit $X \subset Y \subset Z$ une suite croissante de CW-complexes. Montrer qu'il y a une suite exacte longue naturelle en homologie (on pourra considérer une suite exacte courte de complexes de chaines cellulaires relatifs)

$$\cdots \to H_i(Y, X) \to H_i(Z, X) \to H_i(Z, Y) \to H_{i-1}(Y, X) \to \dots$$

Le résultat est-il encore vrai si on suppose que X, Y, Z sont des espaces topologiques.

Exercice 4 (**Quelques propriétés de l'homologie des CW-complexes**). Soit X un CW-complexe.

1) Soit $n \geq 1$ et $i_n : X^{(n)} \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle. Montrer que, pour tout $k \leq n-1$ l'application induite

$$H_k(X^{(n)}) \xrightarrow{(i_n)_*} H_k(X)$$

est un isomorphisme.

2) Montrer que l'application naturelle $H_{n-1}(X^{(n)}) \to H_{n-1}(X^{(n)}, X^{(n-3)})$ est un isomorphisme (on pourra regarder le triplet $(X^{(n)}, X^{(i)}, X^{(i-1)})$ pour $0 \le i \le n-4$).

3) En considérant simultanément les longues suites exactes en homologie associées aux triplets $(X^{(n-3)}, X^{(n-2)}, X^{(n-1)}$ et $(X^{(n-3)}, X^{(n-1)}, X^{(n)})$, montrer que l'homologie $H_{n-1}(CW(X))$ du complexe cellulaire est isomorphe à $H_{n-1}(X^{(n)}, X^{(n-3)})$. En déduire l'équivalence entre homologie cellulaire et homologie singulière.

Exercice 5 (Produits). Soient X, Y deux CW-complexes finis.

1. Montrer que l'on peut définir une structure de CW-complexe sur le produit cartésien $X \times Y$ de telle sorte que si $\phi : D^n \to e \subset X^{(n)}$ est une n-cellule de X et $\psi : D^m \to f \subset Y^{(m)}$ une m-cellule de Y, alors, $X \times Y$ a une $(n+m)$-cellule: $D^{n+m} \cong D^n \times D^m \xrightarrow{\phi\times\psi} X \times Y$ (on notera $e \times f$ cette cellule).

2. Soit $\alpha \subset X^{(n-1)}$ une $n-1$-cellule et
$$p_(\alpha \times f) : (X \times Y)^{(n+m)} \to (X \times Y)^{(n+m)}/(X \times Y)^{(n+m-1)} \cong \bigvee S^{n+m-1} \to S^{n+m-1}$$
la "projection" sur la sphère correspondant à la cellule $\alpha \times f$ de $(X \times Y)^{(n+m-1)}$. Montrer que le degré de la composée $p_(\alpha \times f) \circ (\phi \times \psi)_{|\partial D^{n+m}}$ a le même degré que l'application $p_\alpha \circ \phi_{|\partial D^n}$.

3. En déduire que que le complexe cellulaire $CW(X \times Y)$ est isomorphe à $CW(X) \otimes CW(Y)$ où la différentielle sur ce dernier complexe est donné par $d(e \times f) = \partial_X(e) \times f + (-1)^n e \times \partial_Y f$ où ∂_X, ∂_Y sont les différentielles de $CW(X)$ et $CW(Y)$ (et n la dimension de e).

4. En déduire les groupes d'homologie de $S^n \times S^m$, $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}P^2$, de $(S^1)^{10}$.

5. Si X et Y sont des CW-complexes finis, calculer la caractéristique d'Euler de $X \times Y$ en fonction de celle de X et de Y.

Quelques exercices avec de la cohomologie

Exercice 6 (Cohomologie de de Rham). Soit M une variété (lisse). Un simplexe $\sigma : \Delta^p \to M$ est dit lisse (ou C^∞) si il est la restriction à Δ^p d'une application lisse $\mathbb{R}^{p+1} \supset U_p \to M$ d'un voisinage U_p de Δ^p dans $\mathbb{R}^{p+1}$. On note $C_p^\ell(M)$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel de base l'ensemble des p-simplexes lisses.

1) Montrer que les opérateurs de face usuels, munissent $C_*^\ell(M, \mathbb{R})$ d'une structure de complexe de chaines. On note $H_*^\ell(M, \mathbb{R})$ l'homologie singulière "lisse" de ce dernier et $H_\ell^*(M, \mathbb{R})$ la cohomologie singulière lisse (définie comme la cohomologie du complexe de cochaines dual: $C_\ell^*(M, \mathbb{R}) = Hom_{\mathbb{R}}(C_*^\ell(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$).

2) Soit $c = \sum k_i \sigma_i \in C_p^\ell(M)$ une chaine lisse. On définit, pour toute p-forme différentielle $\omega \in \Omega^p(M)$, $\int_c \omega = \sum k_i \int_{\Delta^p} \sigma_i^*(\omega)$. En utilisant la formule de Stoke, montrer que l'application $\omega \mapsto \left(c \mapsto \int_c \omega\right)$ définit un morphisme de complexe de cochaines $\int : \Omega^*(M) \to C_\ell^*(M, \mathbb{R}) = Hom_{\mathbb{R}}(C_*^\ell(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$.

3) Montrer que $\int : H_{dR}^*(M) \to H^*(M, \mathbb{R})$ est un isomorphisme en cohomologie si M est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ (pour un certain n).

4) Montrer que si U, V sont des ouverts de M tels que $\int : H_{dR}^*(U) \to H^*(U, \mathbb{R})$, $H_{dR}^*(V) \to H^*(V, \mathbb{R})$ et $H_{dR}^*(U \cap V) \to H^*(U \cap V, \mathbb{R})$ soient des isomorphismes, alors $H_{dR}^*(U \cup V) \to H^*(U \cup V, \mathbb{R})$ est un isomorphisme (penser à Mayer-Vietoris). Énoncer et prouver un résultat similaire pour des unions *disjointes* d'ouverts.

5) Montrer que M est l'union $M = X \cap Y$ de deux ouverts, tels que $X = \bigcap_{n\ge 0} X_n$ et $Y = \bigcap_{n\ge 0} Y_n$ soient des réunions disjointes d'ouverts (difféomomorphes à des ouverts) de $\mathbb{R}^n$ convexes.

6) Déduire des questions précédentes que $\int : H^*_{dR}(M) \to H^*(M, \mathbb{R})$ est un isomorphisme.

7) Soit $\phi : C^*(M, \mathbb{R}) \to C^*_\ell(M, \mathbb{R})$ l'application induite par l'application des simplexes lisses dans l'ensemble des simplexes. Montrer que l'aplication induite $\phi^* : H^*(M, \mathbb{R}) \to H^*_\ell(M, \mathbb{R})$ est un isomorphisme quand M est un ouvert convexe.

8) Reprendre la question 4) avec ϕ^* à la place de $\int$, puis en déduire que ϕ^* est un isomorphisme pour toute variété M. Conclure qu'il y a un isomorphisme naturel entre la cohomologie de de Rham d'une variété et la cohomologie singulière à coefficients réels.

Exercice 7 (Produit Cup). 1. Soit $X = S^n \vee S^m \vee S^{n+m}$. Montrer que X a les mêmes groupes d'homologie et cohomologie que $S^n \times S^m$.

2. Calculer les structures d'anneaux de la cohomologie de X et de $S^n \times S^m$ et en déduire que ces esapces ne sont pas homéomorphes.

3. Montrer qu'il y'a une application continue du tore à g-trous vers $\bigvee_{i=1}^g T$ (où $T = S^1 \times S^1$ est le tore usuel). En déduire la structure d'anneau de la cohomologie du tore à g-trous.

Cas de $\mathbb{R}P^n$ Le but de cette question est de montrer que l'anneau de cohomologie $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est isomorphe à l'anneau de polynomes $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$.

(a) Montrer que, pour tout $k \leq n-1$, on a un isomorphisme naturel $H^k(\mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong H^k(\mathbb{R}P^n)$ et en déduire qu'il suffit de montrer que le cup produit du générateur de $H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ avec le générateur de $H^{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est le générateur de $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ pour obtenir le résultat souhaité.

(b) On identifie $\mathbb{R}P^k \subset \mathbb{R}P^n$ avec le sous-espace d'équation $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$ (où $[x_0, \ldots, x_n]$ sont les coordonnées homogènes d'un vecteur) et $\mathbb{R}P^{n-k}$ avec le sous-espace d'équation $x_0 = \cdots = x_{k-1} = 0$. Montrer que l'on a un diagramme commutatif naturel (dans lequel les groupes de cohomologie sont à coefficient dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

$$\begin{tikzcd}
H^k(\mathbb{R}P^n) \times H^{n-k}(\mathbb{R}P^n) \arrow[r, "\cup"] & H^n(\mathbb{R}P^n) \\
H^k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^{n-k}) \times H^{n-k}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \mathbb{R}P^k) \arrow[r, "\cup"] \arrow[u] \arrow[d] & H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n - \{q\}) \arrow[u] \arrow[d] \\
H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^{n-k}) \times H^{n-k}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \mathbb{R}^k) \arrow[r, "\cup"] & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})
\end{tikzcd}$$

où $q = \mathbb{R}P^k \cap \mathbb{R}P^{n-k}$ et les flèches de droite sont des isomorphismes.

(c) Montrer que les flèches verticales de gauche sont aussi des isomorphismes.

(d) Vérifier que la flèche du bas est un isomorphisme et en déduire la structure d'anneau de la cohomologie de $\mathbb{R}P^n$.