Correction de la fin de l'exo 8

3. On prouve par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}*$ et $t < 0$, la dérivée $n$-ième de $f$ en $t$ s'écrit sous la forme $\dfrac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}$, avec $P_n$ un polynôme.
*Initialisation* : Pour $n = 1$, le calcul de $f'$ montre que la dérivée première a la forme cherchée, avec $P_1 = -1$.
*Hérédité* : Supposons que pour un entier $n$ fixé, la dérivée $n$-ième a la forme cherchée, et calculons la dérivée $n+1$-ième.
Le petit calcul de la dérivée $n+1$-ième (que je n'écris pas dans ce corrigé) montre que l'on trouve la bonne forme, où $P_{n+1}(t) = t^2 P_n' - (2nt+1)P_n(t)$ (qui est bien un polynôme en $t$).
*Conclusion* : Pour tout $n \in \mathbb{N}*$, on a par le théorème de récurrence que la dérivée $n$-ième de $f$ en $t < 0$ s'écrit sous la forme $\dfrac{P_n(t)}{t^{2n}}e^{1/t}$, avec $P_n$ un polynôme.

4. La fonction $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, comme composée de fonctions $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_*^-$. On prouve par récurrence que $f$ est infiniment dérivable en 0, avec $f^{(k)}(0) = 0$, pour $k > 0$.
*Initialisation* : On a vu que $f'(0)$ existait et valait 0.
*Hérédité* : Supposons que pour un entier $k$ fixé, $f^{(k)}(0)$ existe et vaut 0. Montrons que $f^{(k+1)}(0)$ existe et vaut 0.
On a directement que $f_d^{(k+1)}(0)$ existe et vaut 0, car $f(t) = 0$ pour $t \geq 0$.
D'autre part, pour $t < 0$, $\dfrac{f^{(k)}(t) - f^{(k)}(0)}{t-0} = \dfrac{P_n(t)}{t^{2n+1}}e^{1/t}$ en utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence. En effectuant (comme pour les questions 1. et 2.) le changement de variable $X = 1/t$ (avec $X$ qui tendra vers $-\infty$ quand $t$ tend vers 0 par valeurs négatives), on obtient une expression de la forme $Q(X)e^X$, avec $Q(X)$ une fraction rationnelle. La limite quand $X$ tend vers $-\infty$ est donc nulle, par le théorème des croissances comparées. Donc $f_g^{(k+1)}(0)$ existe et vaut 0. Donc $f^{(k+1)}(0)$ existe et vaut 0.
*Conclusion* : La fonction $f$ est infiniment dérivable en 0 (avec ses dérivées itérées nulles).

La fonction $f$ est donc de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. Si la fonction $f$ était développable en série entière en 0, il existerait un voisinage de 0 sur lequel la fonction serait égale à sa série de Taylor en 0. Or, vu les calculs de la question précédente, la série de Taylor en 0 est nulle ($f(0)$ et toutes les dérivées itérées étant nulles en 0). La fonction $f$ serait donc la fonction nulle sur un voisinage de 0, ce qui n'est pas le cas (car $e^{1/t} > 0$ pour $t < 0$).
La fonction $f$ n'est donc pas développable en série entière en 0.