Feuille de TD1

Exercice 1. *Factorisation de polynômes, polynômes minimaux et formes de Jordan*
On travaille dans le corps des complexes.
On considère le polynôme $P = X^7 + 2X^6 - X^5 - 6X^4 - 9X^3 - 10X^2 - 7X - 2$ que l'on peut écrire comme $\prod_i (X - \lambda_i)^{n_i}$, où les λ_i sont les racines de P et n_i leurs multiplicités respectives.
On appelle alors Q le polynôme $\prod_i (X - \lambda_i)$.
On admet que $Q = X^4 - X^3 - X^2 - X - 2$.

1. Rappeler comment obtenir Q à partir de P.
2. En trouvant deux racines évidentes de Q, factoriser Q.
3. Obtenir alors une factorisation de P.
4. Donner un exemple de matrice dans $M_7(\mathbb{C})$ dont P est le polynôme caractéristique et Q est le polynôme minimal.
5. Donner des exemples de matrice dans $M_7(\mathbb{C})$ dont P est le polynôme caractéristique et $(X+1)Q$ est le polynôme minimal (exemples avec des rangs différents). De telles matrices sont-elle diagonalisables ?
6. Pour une matrice dans $M_7(\mathbb{C})$ dont P est le polynôme caractéristique, quelles sont les autres possibilités pour le polynôme minimal ?

Exercice 2. *Décomposition de Dunford*
On considère le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Obtenir de deux façons différentes la décomposition de Dunford de la matrice A définie par blocs

$$A = \begin{pmatrix} J_{\lambda,r} & 0 \\ 0 & N_0 \end{pmatrix}$$

où $J_{\lambda,r}$ est un bloc de Jordan de taille $r > 0$ associé à un réel λ non nul, et où N_0 est une matrice nilpotente de taille $s > 0$.

Exercice 3. *Algorithme de Jordan*
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{C}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer sa forme de Jordan et une base associée. Décrire les espaces caractéristiques.

Rappels sur les corps finis

Exercice 4. Soit P le polynôme $X^2 + X + 1$ sur $\mathbb{F}_2[X]$.
1) Quelle est la dimension (comme $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel) de $\mathbb{F}_2[X]/(P)$? En donner une base simple.
2) Ecrire la table de multiplication de $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[X]/(P)$ et montrer que $(\mathbb{F}_4^\times, \times) \simeq \langle \overline{X} \rangle$ (iso de groupes).

Exercice 5. Soit $\mathbb{K}$ un corps et p sa caractéristique.
a) Montrer que $\mathbb{K}$ a une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel.
b) En déduire que si $\mathbb{K}$ est fini, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\mathbb{K}| = p^n$.

Exercice 6. Soit A un anneau (commutatif unitaire) intègre de caractéristique p.
On considère l'application $Frob : A \to A$ définie par $Frob(x) = x^p$.
a) Montrer que $Frob$ est un endomorphisme d'anneaux unitaires.
b) Pour $A = \mathbb{F}_p$, montrer que $Frob = id$.
c) Sur $\mathbb{F}_p[X]$, montrer que $Frob$ est linéaire et déterminer ses points fixes.

Exercice 7. Factoriser $X^p - X \in \mathbb{F}_p[X]$. En déduire les points fixes de $Frob$ sur $\mathbb{F}_q$, où $q = p^n$.

Exercice 8. Montrer que $\mathbb{F}_2[X]/(X^3 + X + 1)$ et $\mathbb{F}_2[X]/(X^4 + X + 1)$ définissent $\mathbb{F}_8$ et $\mathbb{F}_{16}$. Donner un générateur du groupe multiplicatif de ces corps.

On rappelle pour la suite du cours le théorème fondamental suivant :
Pour tout nombre premier p, pour tout entier naturel non nul n, il existe un corps de cardinal p^n. Ces corps s'obtiennent par exemple comme quotient de $\mathbb{F}_p[X]$ par un polynôme irréductible (engendrant un idéal maximal).