Fonctions trigonométriques hyperboliques

Déf : On appelle cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

$$ch\, x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \qquad sh\, x = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad th\, x = \frac{sh\, x}{ch\, x}$$

Rem : $t \mapsto (ch\, t, sh\, t)$ est une paramétrisation d'une branche d'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$, de même que $(\cos t, \sin t)$ paramètre le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Prop :
- ch, sh et th sont continues et indéfiniment dérivables, respectivement paire, impaire et impaire.
- $ch' t = sh\, t \qquad sh' t = ch\, t \qquad th' t = \dfrac{1}{ch^2 t} = 1 - th^2 t$
- Exemples de formules trigonométriques hyperboliques :

$$ch(x+y) = ch(x)\, ch(y) + sh(x)\, sh(y)$$
$$sh(x+y) = ch(x)\, sh(y) + sh(x)\, ch(y)$$
$$ch^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} ch(2x) \qquad sh(2x) = 2\, ch(x)\, sh(x)$$

(Ce sont presque les mêmes formules, à des différences de signe près, par rapport aux formules trigonométriques usuelles)

Rem : La fonction exponentielle peut être en fait définie sur $\mathbb{C}$, donc ch et sh également, et on obtient :
$\cos x = ch(ix)$ et $i \sin x = sh(ix)$.

Exo :
- Prouver les formules de dérivation.
- Prouver les 4 formules trigonométriques hyperboliques ci-dessus, ainsi que la formule de "Pythagore hyperbolique" :

$$ch^2 - sh^2 = 1.$$

- Prouver que pour tout x, $ch\, x > |sh\, x|$ (et donc $-1 < th\, x < 1$)

Fonctions hyperboliques réciproques :

- ch réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $[1;+\infty[$
  Sa réciproque est argch : $[1;+\infty[\to \mathbb{R}^+$
  (argument cosinus hyperbolique)
  $$\operatorname{argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
- sh réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
  Sa réciproque est argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $\operatorname{argsh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
- th réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$.
  Sa réciproque est argth : $]-1;1[\to \mathbb{R}$ et $\operatorname{argth}' x = \dfrac{1}{1-x^2}$

<u>Prop</u> : $\forall x \geqslant 1$, $\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$\forall x \in]-1;1[$, $\operatorname{argth} x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

<u>Preuve</u> de la 2^e relation

$$\begin{aligned}
& \operatorname{argsh} x = t \\
\iff\ & x = \operatorname{sh} t \qquad \text{on pose } T = e^t \\
\iff\ & x = \frac{T + \frac{1}{T}}{2} \\
\iff\ & T^2 - 2xT - 1 = 0 \qquad \text{équation du second degré en } T,\ \Delta = 4(1+x^2) \\
\iff\ & T = x + \sqrt{1+x^2} \qquad (\text{l'autre racine est négative, or } T = e^t > 0) \\
\iff\ & \operatorname{argsh} x = \ln T = \ln\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)
\end{aligned}$$

<u>Exo</u> :
- Prouver les 3 dérivées.
- Prouver les 1^e et 3^e relations de la proposition (soit comme la preuve rédigée, soit via les dérivées et l'égalité en un point).
- Tracer les 6 courbes.