MACS2 **Projets déterministes**
Institut Galilée **Année 2013-2014**

PROJET n$^{\text{o}}$ 1

Caroline Japhet

Différences Finies 2D - problème d'une membrane vibrante

---

1 Rappels sur les différences finies

Rappelons que la dérivée f' d'une fonction $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ est définie par :

$$f'(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Géométriquement, la dérivée correspond à la pente de la tangente à f en un point x et la limite est intuitivement la pente (voir la figure 1.1).

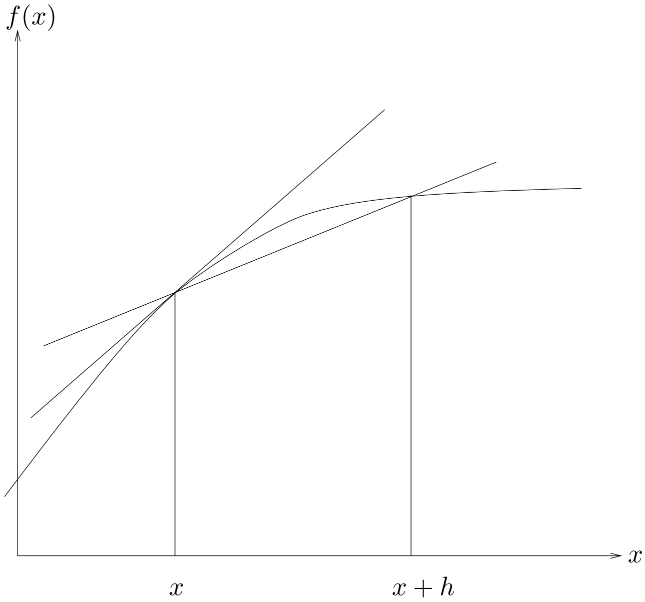

Figure 1.1 – Approximation de la dérivée et dérivée exacte

2 Dérivées du premier ordre

A partir de la définition mathématique on obtient une approximation numérique naturelle de la dérivée. On utilise la définition mathématique pour une petite valeur de h pour approcher la dérivée. Cela conduit à l'approximation par une *différence finie progressive (forward difference approximation)* :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

On peut définir de manière analogue la *différence finie rétrograde (backward difference approximation)* par :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Pour calculer le terme d'erreur dans ces approximations, on utilise le développement de Taylor de f en x,

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2, \quad x \leq \xi \leq x+h,$$

qui conduit à

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi),$$

et ainsi la différence finie progressive est une approximation d'ordre 1 de la dérivée. On peut montrer le même résultat pour la différence finie rétrograde.

Des approximations d'ordre plus élevé peuvent être obtenues en utilisant l'information des évaluations de la fonction des deux côtés ou plus. Par exemple en utilisant la valeur de f à gauche et à droite de x, on peut obtenir une approximation du second ordre. En utilisant les développement de Taylor

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_1)h^3, \quad x \leq \xi_1 \leq x+h, \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi_2)h^3, \quad x-h \leq \xi_2 \leq x, \end{aligned}$$

on obtient, en soustrayant le deuxième développement du premier,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{1}{12}(f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2))h^2,$$

et ainsi l'approximation est du second ordre. Notez que par le théorème des valeurs intermédiaires pour $f^{(3)}$ continue, on peut simplifier le terme d'erreur

$$\frac{1}{12}(f^{(3)}(\xi_1) + f^{(3)}(\xi_2))h^2 = \frac{1}{6}f^{(3)}(\xi)h^2, \quad \xi_2 \leq \xi \leq \xi_1.$$

3 Dérivées d'ordre supérieur

Pour approcher des dérivées d'ordre supérieur, on utilise plus de termes dans les développements de Taylor. Par exemple pour la dérivée seconde, on peut utiliser

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(x)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)h^4, \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x)h^2 - \frac{1}{6}f^{(3)}(x)h^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)h^4, \end{aligned}$$

où $x \leq \xi_1 \leq x+h$ et $x-h \leq \xi_2 \leq x$. En additionnant ces deux développements, on trouve

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{1}{12}f^{(4)}(\xi)h^2,$$

où l'on a encore utilisé le théorème des valeurs intermédiaires pour simplifier le terme d'erreur.

On a l'approximation suivante d'ordre 2 :

$$f''(x) \quad \simeq \quad \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. \tag{1}$$

Question 1. Construire un exemple permettant de représenter sur un graphe l'ordre des différentes approximations vues ci-dessus (utiliser une échelle logarithmique avec la fonction *loglog* de Matlab).

4 Problème de la membrane vibrante

On s'intéresse aux vibrations d'une membrane fine (i.e. d'épaisseur très faible devant ses dimensions latérales). On suppose que cette membrane est tendue sur un contour de forme déterminée, comme la peau d'un tambour. Au repos, la membrane est supposée horizontale. Si on considère un élément de surface au repos en $(x, y, 0)$, à l'instant t où la membrane vibre transversalement, l'élément de surface se situe en $(x, y, z(x, y, t))$. En première approximation, la relation fondamentale de la dynamique indique que l'élément de surface considéré $z(x, y, t)$ satisfait, pour de faibles déplacements, l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \frac{\nu}{\rho}\Delta z \quad = \quad 0, \qquad \forall (x,y) \in \Omega,\ \forall t > 0, \tag{2}$$

avec ν la tension de cette membrane (supposée isotrope et uniforme), ρ sa masse par unité de surface et Ω le domaine délimité par la membrane.

On suppose que $\Omega = [0, L] \times [0, W]$ et que la membrane est attachée en $y = 0$ et en $y = W$, on impose ainsi des conditions aux limites de Dirichlet/Neumann homogènes à la fonction $z(x, y, t)$:

$$\begin{array}{rcccll} z(0,y,t) & = & z(L,y,t) & = & 0, & \forall y \in [0,W],\ \forall t > 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,0,t) & = & \dfrac{\partial z}{\partial y}(x,W,t) & = & 0, & \forall x \in [0,L],\ \forall t > 0. \end{array} \tag{3}$$

Nous nous intéressons à la recherche des modes propres : On cherche $z(x, y, t)$ solution de (2) (3) de la forme

$$z(x, y, t) = u(x, y) sin(\omega t).$$

En particulier u est solution de

$$\begin{array}{rcccll} -\Delta u(x,y) & = & k^2 u(x,y), & & & \forall (x,y) \in \Omega, \\ u(0,y,t) & = & u(L,y,t) & = & 0, & \forall y \in [0,W],\ \forall t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0,t) & = & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,W,t) & = & 0, & \forall x \in [0,L],\ \forall t > 0. \end{array} \tag{4}$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$, où $c = \sqrt{\frac{\nu}{\rho}}$ est la vitesse de propagation de l'onde dans la membrane. La résolution de ce problème dépend de la forme du contour, supposée ici rectangulaire. Un exemple avec $L = 100$, $W = 12$, est donné figure 4.1.

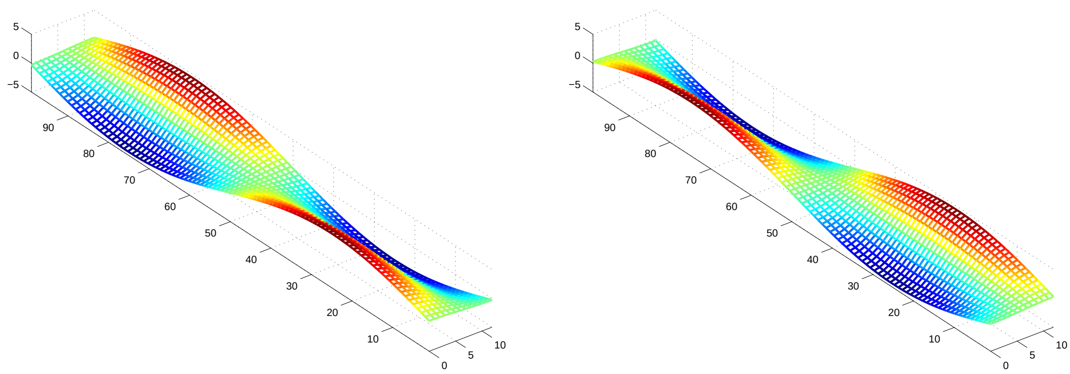

FIGURE 4.1 – vibrations d'une membrane (avec conditions de Dirichlet-Neumann)

5 Résolution approchée du problème (4) par une méthode de différences finies

Discrétisation en espace

On commencera par discrétiser le rectangle $\bar{\Omega} = [0, L] \times [0, W]$ de manière uniforme suivant x et y. On se donne un entier $n > 0$ tel que l'on ait $n + 1$ intervalles en x et un entier $m > 0$ tel que l'on ait $m - 1$ intervalles en y. Le pas de discrétisation en x est alors défini par $h_x = \frac{L}{n+1}$ et celui en y par $h_y = \frac{W}{m-1}$. On rappelle qu'idéalement h_x et h_y sont petits devant 1. On considère les points du rectangle regulièrement espacés : $(x_i, y_j) := (ih_x, jh_y)$, pour $i = 0, \cdots n + 1$, $j = 0, \cdots m - 1$.

Discrétisation des équations

Question 2. Proposer une discrétisation du problème (4), en utilisant les approximations par différences finies vues à la Section 1.

Question 3. Ecrire une fonction "MatriceLaplacien.m" prenant en paramètres d'entrée L, W, n, m et retournant la matrice issue de la discrétisation du Laplacien avec conditions au bord de Dirichlet/Neumann. On proposera des tests de validation de cette matrice.

Question 4. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de cette matrice en utilisant la fonction "eigs" de Matlab. Pour quelques valeurs propres, représenter les modes graphiquement à l'aide de la commande Matlab $C = reshape(U(:, i), n, m)$ où U est la matrice contenant les vecteurs propres.

Remarque 1 : Pour simplifier, on pourra prendre le même pas en x et en y : pour n donné, $h = h_x = h_y = \frac{L}{n+1}$ et $m = [\frac{W}{h}] + 1$ (dans ce cas on a $\bar{\Omega} = [0, L] \times [0, [\frac{W}{h}]h)$. La fonction "MatriceLaplacien.m" prendra alors en paramètres d'entrée L, W et n.
Remarque 2 : Dans un premier temps on pourra considérer des conditions de Dirichlet homogène sur le bord complet $\partial\Omega$. Dans ce cas on considérera $m + 1$ intervalles en y, et $h_y = \frac{W}{m+1}$.