Cours de probabilités

cette semaine : cours lundi, mercredi et jeudi
semaine prochaine : pas de cours
cours les 20-22 et 23 mars

partie principale du cours : martingales, chaînes de Markov
référence : cours de Le Gall
livre de Durrett ; Probability, theory and examples

Rappel : convergence de variables aléatoires

X : variable aléatoire : fonction mesurable

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow{X} (M, d) \qquad (M,d) \text{ espace métrique}$$

(X_n) suite de variables aléatoires

- vues comme des fonctions
  convergence ponctuelle d'une suite de fonctions (f_n) : $\forall x$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$

* notion plus faible pour les variables aléatoires : convergence presque sure

$X_n \xrightarrow{p.s} X$ si $\exists B \in \mathcal{F}$, $P(B)$, $\forall \omega \notin B$, $X_n(\omega) \to X(\omega)$

exemple : (Y_n) variables aléatoires iid à valeurs dans $\mathbb{R}$, $E(Y_n)$ existe
$E(Y_n) = m$

$$X_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}{n}$$

Th (Loi des grands nombres) : $X_n \xrightarrow{p.s} X$

où X est la variable aléatoire qui vaut m p.s.

démonstration : on le fera en utilisant la théorie des martingales rétrogrades.

* cv dans L^p : $1 \leq p < \infty$

def : $X_n \xrightarrow{L^p} X$ si $E(|X - X_n|^p) \underset{n\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\iff \left(\mathbb{E}(|X_n - X|^p)\right)^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \iff$ distance de X_n à X dans $L^p \to 0$

$p = \infty$ $\quad X_n \xrightarrow{L^\infty} X$ $\quad$ si $\mathbb{E}(\sup |X_n - X|) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dans la loi des grands nombres, on a aussi convergence de X_n vers X dans L^1
Mais on n'a pas forcément convergence dans L^p $(p > 1)$

* CV en probabilité :

def : $X_n \xrightarrow{P} X$ $\quad$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to 0]{} 0$

on définit sur l'ensemble de variables aléatoires $(\Omega, \mathcal{F})$ la distance

$$d(X,Y) = \mathbb{E}(|X-Y| \wedge 1)$$
$$[a \wedge b = \inf(a,b)]$$

alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ ssi $d(X_n, X) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\quad$ [Prop 10.1.1]

Prop : • si X_n CV ps vers X ou dans L^p avec $p \geq 1$
alors $X_n \xrightarrow{P} X$

• réciproque partielle : si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, $\exists (n_k)_{k\geq 1}$ sous-suite telle que
$X_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{ps} X$

contre-exemple : Y uniforme dans $[0,1]$

$X_1 = \mathbb{1}_{Y \in [0,\frac{1}{2}]}$ $\qquad$ $X_3 = \mathbb{1}_{Y \in [0,\frac{1}{3}]}$ $\qquad$ $X_6 = \mathbb{1}_{X \in [0,\frac{1}{4}]}$

$X_2 = \mathbb{1}_{Y \in [\frac{1}{2},1]}$ $\qquad$ $X_4 = \mathbb{1}_{X \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}$ $\qquad$ $X_7 = \mathbb{1}_{X \in [\frac{1}{4},\frac{2}{4}]}$

$X_5 = \mathbb{1}_{X \in [\frac{2}{3},1]}$ $\qquad$ $\vdots$

$X = 0$ $\quad \varepsilon > 0$ $\quad \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X| = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

mais p.s., $X_n = 1$ pour une infinité d'entiers n $\to$ pas de CV presque sûre

CV en loi : notion liée à une suite de lois de probabilités.

déf : (X_n) cv en loi vers X si $\forall f$ fonction continue bornée,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$$

on note $X_n \xrightarrow{(\mathcal{L})} X$ ou $X_n \xrightarrow{(d)} X$

Remarques : ① si les (X_n) sont à valeurs dans un ensemble discret, par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, alors $X_n \xrightarrow{(d)} X$ ssi $\forall k$, $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$

on prend la fonction $f : \mathbb{1}_{\{x\}}$ qui est continue car toutes les fonctions sont continues sur un espace discret

② Si les (X_n) sont à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et ont une densité f_n

$[\mathbb{P}(X_n \in [a,b]) = \int_a^b f_n(x)\,dx)]$, si $f_n \to f$ presque partout

et $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = 1$

alors $(X_n) \xrightarrow{(d)} X$ où X est la variable aléatoire de densité f

⚠ on peut avoir $X_n \xrightarrow{(d)} X$, | X a une densité mais pas les X_n (a)
| les X_n ont une densité mais pas X (b)

(a) : exemple $X_n = \frac{1}{n}[\delta_{1/n} + \delta_{2/n} \cdots \delta_{n/n}]$

alors $X_n \xrightarrow{(d)} X$ où X suit la loi uniforme sur $[0,1]$;

$\forall g$ continue bornée, $\mathbb{E}\, g(X_n) = \dfrac{g(\frac{1}{n}) + g(\frac{2}{n}) \cdots + g(\frac{n}{n})}{n}$; Somme de Riemann

$\mathbb{E}\, g(X_n) \to \int_0^1 g(x)\,dx = \mathbb{E}[g(X)]$ où X a pour densité la fonction : $f = \mathbb{1}_{[0,1]}$

Les X_n n'ont pas de densité mais X a une densité

(b) Y_n iid, uniformes sur $[0,1]$, $X_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$

alors les Y_n ont une densité. Les X_n ont aussi une densité

[si Z, Z' sont indépendantes, de densité f, f', $Z+Z'$ a une densité $f * f'$

$$f * f'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) f'(x-y)\, dy \quad]$$

Mais $X_n \xrightarrow{(d)} \delta_{1/2}$ [Loi des grands nombres] et $\delta_{1/2}$ n'a pas de densité

<u>Théorème de la limite centrale</u> [en anglais: central limit theorem, CLT]

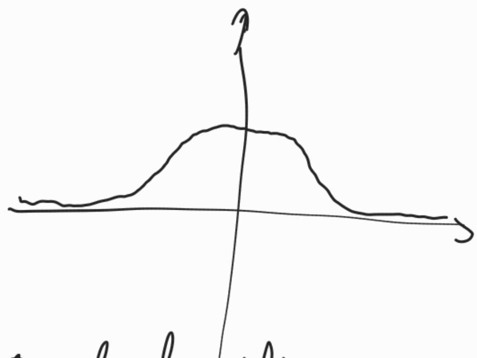
Y_n iid à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{E}(Y_n) = m$, $\operatorname{var}(Y_n) = \sigma^2$

$X_n = \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}$

$$\sqrt{n}\,(X_n - m) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ si X a pour densité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$



[idée CV en loi $\Leftrightarrow$ CV des transformées de Fourier. Sous les hypothèses du théorème on fait un développement limité de la transformée de Fourier qui donne la convergence] $\left(\mathbb{E}[e^{iX}] = 1 + \mathbb{E}(iX) - \frac{1}{2}\mathbb{E}(X^2) \dots \right)$

<u>Prop</u>: • si $(X_n) \xrightarrow{(P)} X$ alors $(X_n) \xrightarrow{(d)} X$

• réciproque partielle : si $X = \delta_a$ et si $X_n \xrightarrow{(d)} X$, alors $X_n \xrightarrow{(P)} X$

Prop : Les 4 assertions suivantes sont équivalentes

(i) $X_n \xrightarrow{(d)} X$

(ii) $\forall G$ ouvert, $\liminf \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in G)$

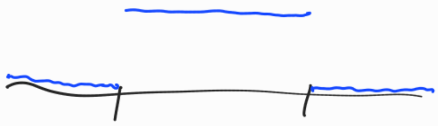
(iii) $\forall F$ fermé, $\limsup \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$

(iv) $\forall B$ borélien tel que $\mathbb{P}(X \in \partial B) = 0$, $\qquad [\partial B = \bar{B} \setminus \mathring{B}]$

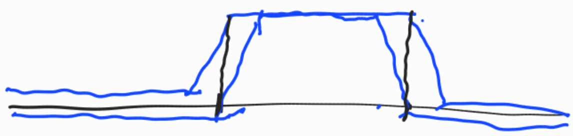
$$\lim \mathbb{P}(X_n \in B) = \mathbb{P}(X \in B)$$

idée de la démonstration : $\mathbb{P}(X_n \in B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B(X_n)]$

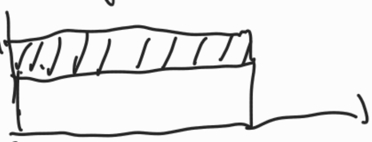
si B est un intervalle, $\mathbb{1}_B =$



on approxime $\mathbb{1}_B$ par



exple : X_n loi uniforme dans $\mathbb{R}^2$ sur le rectangle



converge vers X la loi uniforme sur le segment $[0,1] \times \{0\} = I$

$\bar{I} = I \quad , \mathring{I} = \emptyset$

$\partial I = I$

$\mathbb{P}(X \in \partial I) = \mathbb{P}(X \in I) = 1$

$\mathbb{P}(X_n \in I) = 0 \not\to \mathbb{P}(X \in I) = 1$

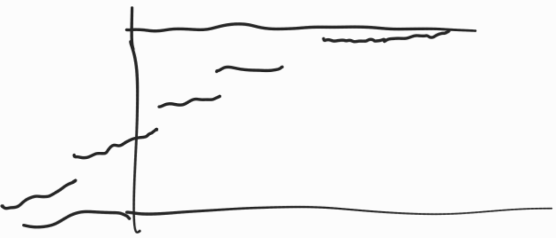
Cas des variables aléatoires réelles

X v.a.r. , fonction de répartition de X : $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$x \longmapsto \mathbb{P}(X \leq x)$$

rappel : F_X est $\begin{cases} \text{croissante} \\ \text{continue à droite en tout point.} \end{cases}$ elle a une limite à gauche en tout point, et $\forall x$ $\quad \lim\limits_{y \to 0_+} F_X(x+y) - \lim\limits_{y \to 0_-} F_X(x+y) = \mathbb{P}(X = x)$

si F_X est dérivable en tout point, de dérivée f, alors X a pour densité f,

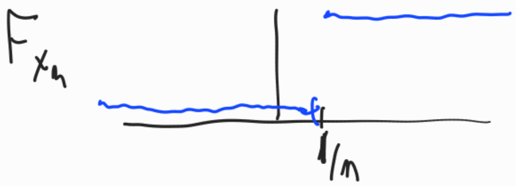


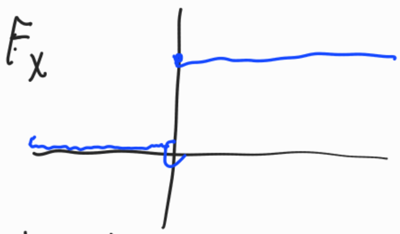
$$\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

<u>Prop</u> (X_n) v.a.r ; $X_n \xrightarrow{(d)} X$ ssi $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$ pour tout x où F_X est continue

<u>expl</u> : $X_n = \delta_{1/n}$ $\quad X_n \to X \quad X = \delta_0$





$F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ si $x \neq 0$ mais $F_{X_n}(0) = 0$ pour tout n

et $F_X(0) = 1$