déf X variable aléatoire dans $\mathbb{R}^d$. La fonction caractéristique est la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^d &\xrightarrow{\phi_X} \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \mathbb{E}\exp(i\langle \xi, X\rangle) \end{aligned}$$

Th. (Lévy) (X_n) variables aléatoires dans $\mathbb{R}^d$, alors

$$(X_n) \xrightarrow{(d)} X \iff \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \phi_{X_n}(\xi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \phi_X(\xi)$$

NB : ϕ_X est une fonction continue. Par définition, s'il y a convergence en loi, alors $\phi_{X_n}(\xi) \to \phi_X(\xi)$ pour tout ξ

Th (Limite centrale) X_n v.a.r iid, $\mathbb{E}(X_n) = m$
$\mathrm{var}(X_n) = \sigma^2$

$$\sqrt{n}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m\right) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

dém $Z_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n} - m = \dfrac{(X_1 - m) + \dots + (X_n - m)}{n}$

$$\phi_{Z_n}(t) = \mathbb{E}\exp\left(it\left[\frac{X_1 - m}{n} + \dots + \frac{X_n - m}{n}\right]\right)$$

$$\overset{(\text{indep})}{=} \mathbb{E}\exp\left(it\frac{X_1 - m}{n}\right) \cdots \mathbb{E}\exp\left(it\frac{X_n - m}{n}\right) = \left(\mathbb{E}\exp\left(it\frac{X_1 - m}{n}\right)\right)^n$$

$$\phi_{X_1 - m}(t) = 1 + it\underbrace{\mathbb{E}(X_1 - m)}_{0} - \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{var}(X_1 - m) + o(t^2)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{var}(X_1 - m) + o(t^2) = 1 - \frac{1}{2}t^2\,\mathrm{var}(X_1) + o(t^2)$$

$$\log \Phi_{\sqrt{n} Z_n}(t) = n \log \mathbb{E}\left(\frac{it}{\sqrt{n}}(X_1 - m)\right) = n \log\left(1 - \frac{1}{2n} t^2 \operatorname{var}(X_1) + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)$$

$$= n\left(-\frac{1}{2}\frac{t^2}{n}\sigma^2 + o\left(\frac{t}{n}\right)\right) = -\frac{1}{2}t^2\sigma^2 + o(1)$$

$$\Phi_{\sqrt{n} Z_n}(t) \to \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\sigma^2\right) = \mathbb{E}(\exp itX) = \Phi_X(t)$$

où $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

donc $\sqrt{n} Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{X_1 + \quad + X_n}{n} - m\right) \xrightarrow{(d)} X$

Remarque : (Feller) il existe des lois de probabilité stables d'indice α,
An Introduction to probability Theory

$0 < \alpha \leq 2$, telles que si X est stable (α)
si (X_i) iid de même loi que X, alors $\forall n \geq 1$

$$\frac{X_1 + X_2 \cdots + X_n}{n^{\alpha - 1}} \text{ a même loi que } X$$

$\alpha = 2$: gaussienne.
si on prend $\alpha \neq 2$, on a un contre-exemple à la loi des grands nombres

Convergence des mesures empiriques

X variable aléatoire, sur $\mathbb{R}^d$
échantillonnage de X ("sampling" en anglais) : $X_1 \ldots X_n \ldots$ variables aléatoires indep, de même loi que X
mesure empirique : mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$

$$\mu_n = \frac{1}{n}(\delta_{X_1} + \delta_{X_2} \cdots + \delta_{X_n}) \quad \text{mesure aléatoire}$$

Th avec probabilité 1, (μ_n) converge en loi vers X

dém : soit $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ fonctions à support compact, il existe H sous-ens dénombrable dense de $\mathcal{C}_c$

si $\varphi \in H$ les v.a. $\varphi(X_i)$ sont indép, même loi, bornées ($\to$ intégrable)

Loi des grands nombres : avec proba 1, $\underbrace{\dfrac{\varphi(X_1) + \dots + \varphi(X_n)}{n}}$ $\to E(\varphi(X_1))$

$\int \varphi(x)\, d\mu_n(x) \longrightarrow \int \varphi(x)\, d\mu(x)$ (μ : loi de X)

il existe Ω_φ, $\mathbb{P}(\Omega_\varphi) = 0$, tel que sur Ω_φ^c,

$$\int \varphi(x)\, d\mu_n(x) \to \int \varphi(x)\, d\mu(x)$$

soit $\tilde{\Omega} = \bigcup_{\varphi \in H} \Omega_\varphi$, $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 0$ et sur $\tilde{\Omega}^c$, $\forall \varphi \in H$

$$\int \varphi(x)\, d\mu_n(x) \longrightarrow \int \varphi(x)\, d\mu(x)$$

$\to$ CV sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ $\to$ CV pour tts les fonctions continues bornées

|| CV en loi