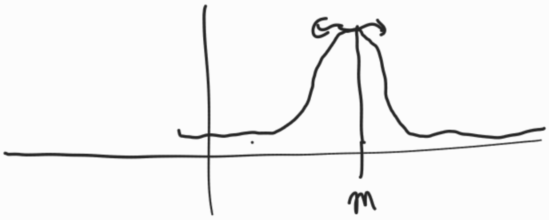
Vecteurs gaussiens dans $\mathbb{R}^d$ $\quad d \geq 1$

$d = 1$ $\quad X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si X est une v.a.r de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$



<u>déf</u> vecteur gaussien $(X_1 \dots X_d) \in \mathbb{R}^d$: variable aléatoire telle que
$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d$ suit une loi gaussienne

<u>remarque</u> $(X_1 \dots X_d)$ gaussien $\Rightarrow$ X_1 gaussienne, X_2 aussi $\dots$ X_d aussi

$\not\Leftarrow$

contre exemple : $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$, ε indép de X_1, $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$

$(X_1, X_2) = (X_1, \varepsilon X_1)$ $\quad X_2$ gaussien

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\quad X_1 + X_2 = X_1(1+\varepsilon) = \begin{cases} 2X_1 & \text{avec proba } \frac{1}{2} \\ 0 & \text{avec proba } \frac{1}{2} \end{cases}$

rappel sur la covariance : X, Y v.a.r L^2

$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ (existe par Cauchy-Schwarz)

$X = Y$ $\quad \mathrm{cov}(X,X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \mathrm{var}\, X$

si $X_1, \dots, X_d$ v.a.r. L^2, on définit $M_{ij} = \mathrm{cov}(X_i, X_j)$

<u>Prop</u> : la matrice $(M_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$ est symétrique positive

<u>Prop</u> : si M est symétrique positive $(d \times d)$, alors il existe

$(X_1, \dots X_d)$ dont la matrice de covariance est M

et $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}\exp(i\langle \xi, X\rangle) = \exp\left(-\frac{1}{2}{}^t\xi M \xi\right)$

dem : si M est symétrique positive, il existe A matrice tq

$$M = A^2$$

$$\Big(\exists P \text{ orthogonale } \quad {}^tP M P = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_d \end{pmatrix} \text{ et } a_i \geq 0$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{a_d} \end{pmatrix}}_{N}{}^2$$

$$M = P N^2 {}^tP = (P N {}^tP)(P N {}^tP)$$

$$A = P N {}^tP \Big]$$

$Y_1, \dots Y_d$ v.a. iid $\mathcal{N}(0,1)$

$X = AY$ est un vecteur gaussien qui satisfait la proposition

$\xi \in \mathbb{R}^d \quad \mathbb{E}(\langle \xi, X\rangle^2) = \mathbb{E}({}^t\xi A Y {}^tY A \xi)$

$$= {}^t\xi A \mathbb{E}(Y {}^tY) A \xi = {}^t\xi A A \xi$$

$$= {}^t\xi M \xi$$

Remarque : si on remplace X par $X + m$, et Y par $Y + m'$, on ne change pas la covariance

un vecteur gaussien est caractérisé par sa moyenne ($\in \mathbb{R}^d$) et par sa matrice de covariance

si $M_{ij} = 0$ alors X_i et X_j sont indépendants

$\rightarrow$ pour les vecteurs gaussiens, indépendance $\Leftrightarrow$ covariance nulle

ce n'est pas vrai quand le vecteur n'est pas gaussien

$(X_1, \varepsilon X_1) = (X_1, X_2)$ $\quad$ $\mathrm{cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1 X_2) - \underbrace{\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)}_{0}$

$$= \mathbb{E}(X_1^2 \varepsilon) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$$

mais X_1, X_2 non indép : $a > 0$

$$\mathbb{P}(X_1 > a, X_2 > a) \neq \mathbb{P}(X > a)\,\mathbb{P}(X_2 > a)$$

$$\mathbb{P}(X_1 > a, \varepsilon X_1 > a) = \mathbb{P}(X_1 > a, \varepsilon = +1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_1 > a)$$

$$\mathbb{P}(X_2 > a) = \mathbb{P}(X_1 > a, \varepsilon = 1) + \mathbb{P}(X < -a, \varepsilon = -1) = \mathbb{P}(X_1 \geq a)$$

$$\mathbb{P}(X_1 > a)\,\mathbb{P}(X_2 > a) = \left[\mathbb{P}(X_1 > a)\right]^2$$

si $\mathbb{P}(X_1 > a) \neq \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(X_1 > a, X_2 > a) \neq \mathbb{P}(X_1 > a)\,\mathbb{P}(X_2 > a)$

<u>Densité</u> : le vecteur gaussien de moyenne $m \in \mathbb{R}^d$ et de matrice de covariance M a pour densité

$$f(x_1 \dots x_d) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{2d} \det M}} \exp\left(-{}^t(x-m) M (x-m)\right)$$

$\det M$: formule du jacobien du changement de variable

cas $M = I_d$ et $m = 0$; densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}^{d}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)$

dans ce cas si A est une matrice orthogonale, $AX = ?$

$\xi \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}\left[\langle \xi, AX\rangle^2\right] = \mathbb{E}\left({}^t\xi\, {}^tX\, {}^tA\, A X \xi\right) = \mathbb{E}\left({}^t\xi\, {}^tX X \xi\right)$

$$= {}^t\xi\,\xi$$

matrice de cov de AX est I_d

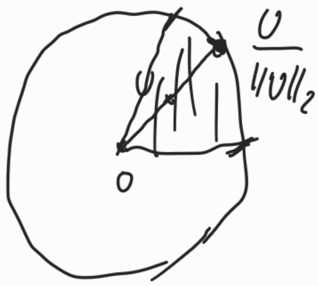
la loi de X est invariante par isométrie (par transformation orthogonale)

$d = 2$ $\quad$ tf orthogonale = rotation

si ρ est une rotation et $X \sim \mathcal{N}(0, I_2)$ alors $\rho(X)$ a même loi que X

Rappel : mesure uniforme sur la sphère $S^{d-1} = \{u \in \mathbb{R}^d, \|u\|_2 = 1\}$

B borélien $\subset S^{d-1}$



$$\Gamma(B) = \{u \in \mathbb{R}^d, 0 < \|u\|_2 \le 1, \frac{1}{\|u\|} u \}$$

on définit $\omega_d(B) = \dfrac{Leb(\Gamma(B))}{Leb(B(0,1))}$

si $B = S^{d-1}$, alors $\Gamma(B) = B(0,1)$ et $\omega_d(S^{d-1}) = 1$

on vérifie que ω_d définit une mesure de proba sur S^{d-1}
[les propriétés de la mesure de Lebesgue sur les $\Gamma(B)$ se traduisent en propriétés sur les B pour ω_d]

ω_d est invariante par transformation orthogonale : si θ orthogonale,

$$\omega_d(B) = \omega_d(\theta B)$$
$$= Leb(\Gamma(B)) = Leb(\theta\Gamma(B)) = Leb(\Gamma(\theta B)) = \omega_d(\theta B)$$

On peut montrer que ω_d est l'unique mesure de proba sur S^{d-1} invariante par transformation orthogonale

Thm $Y^{(d)} = (Y_1^{(d)}, Y_2^{(d)}, \dots, Y_d^{(d)})$ variable aléatoire de loi ω_d

$$X_d = \sqrt{d}\, Y_1^{(d)} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0,1)$$

dem : $Z^{(d)} \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^d$

$$U^{(d)} = \frac{Z^{(d)}}{\|Z^{(d)}\|_2} = \frac{Z^{(d)}}{\sqrt{Z_1^{(d)2} + \dots Z_d^{(d)2}}}$$

$\|U^{(d)}\|_2 = 1$; loi de $U^{(d)}$ est invariante par transformation orthogonale

$U^{(d)}$ a même loi que $Y^{(d)}$ $\Rightarrow X_d$ m̂ loi que

$$\sqrt{d}\ \frac{Z_1^{(d)}}{\sqrt{Z_1^{(d)2}+\dots+Z_d^{(d)2}}} = \frac{Z_1^{d}}{\sqrt{\frac{Z_1^{(d)2}+\dots Z_d^{(d)2}}{d}}}$$

les $Z_i^{(d)}$ sont indép (covariance nulle et vecteur gaussien)

les $Z_1^{(d)2}$ sont indép ; m̂ loi, $\mathbb{E}(Z_1^{(d)2}) = 1$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists D$, $\forall d > D$, avec proba $> 1-\varepsilon$, $\frac{1}{\sqrt{\frac{Z_1^{(d)2}+\dots+Z_d^{(d)2}}{d}}} \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$

$\forall a < b$

$$\mathbb{P}\left(\frac{Z_1^{(d)}}{\sqrt{}} \in [a,b]\right) \xrightarrow[d\to\infty]{} \mathbb{P}(Z_1^{(1)} \in [a,b])$$