Martingales à temps discret

<u>déf</u> : $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ espace de probabilités. Une filtration est une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$. $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \ldots,$

<u>exple</u> : . si $X_1, X_2 \ldots X_n$ .. variables aléatoires, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$

$(\mathcal{F}_n)$ filtration : $\mathcal{F}_{n+1} = \sigma(\mathcal{F}_n, X_{n+1}) \supset \mathcal{F}_n$

- $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ tribu borélienne, P mesure uniforme

$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right], 0 \leq i \leq 2^{n-1}\right)$, $(\mathcal{F}_n)$ filtration.

<u>déf</u> : un processus à temps discret $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires

(X_n) est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si $\forall n$, $\sigma(X_n) \subset \mathcal{F}_n$

<u>déf</u> : une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale à temps discret pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ si :

- $\forall n$, $\mathbb{E}(|X|) < \infty$
- $\forall n$, $\mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) = X_n$ $(*)$

<u>remarque</u> : on dit que (X_n) est une martingale sans préciser la filtration si c'est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$ où $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1 \ldots X_n)$

extension : surmartingale : on remplace $(*)$ par $\mathbb{E}(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) \leq X_n$

sous-martingale : $\geq$

<u>exple</u> : (Y_i) variables aléatoires réelles , $\forall n$, $\mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$

. $\mathbb{E}(Y_n) = 0$

$X_n = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$

On suppose les (Y_n) indépendantes

Alors (X_n) est une martingale

$X_n \in L^1$, $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_0, X_1 \dots X_n) = \mathbb{E}(\underbrace{Y_{n+1}}_{\text{indépendant de } \mathcal{F}_n} + \underbrace{Y_n + \dots + Y_0}_{\text{mesurable } / \mathcal{F}_n} \mid X_0, X_1 \dots X_n)$

$$\mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y_{n+1}) + X_n = X_n$$

interprétation : on joue au casino. Au n-ième tour, on gagne Y_n. X_n argent total gagné après n tours

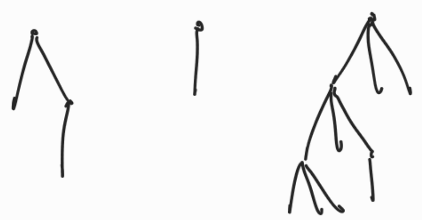
- autre exemple : processus de branchement [évolution d'une population]

au temps 0, on a une population avec Z_0 individus.

Chaque individu se reproduit indépendamment des autres

Z_n : nombre d'individus à la n-ième génération

idée : si le nombre moyen d'enfants est 1, alors Z_n est une martingale



$n=0$	$Z_0 = 3$	$X_1^{(0)} = 2$, $X_2^{(0)} = 1$, $X_3^{(0)} = 3$
$n=1$	$Z_1 = 6$	$X_1^{(1)} = 0$, $X_2^{(1)} = 1$, $X_3^{(1)} = 0$
$n=2$	$Z_2 = 4$	$X_4^{(1)} = 3$
$n=3$	$Z_3 = 4$	

formellement, on suppose qu'on a des variables aléatoires iid $(X_n^{(i)})_{i \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}}$

$X_n^{(i)}$: nombre d'enfants du n-ième individu à la génération i

on suppose que $\mathbb{E}(X_n^{(i)}) < \infty$, $Z_{n+1} = X_1^{(n)} + X_2^{(n)} \dots + X_{Z_n}^{(n)}$

$\mathbb{E}(X_n^{(i)}) = m$

si $Z_n = 0$, alors $Z_{n+1} = 0$ et $\forall k \geq n$, $Z_k = 0$ on dit que le processus s'éteint.

Processus de Galton-Watson (Francis Galton : cousin de Darwin)

Galton et Watson étudiaient les noms de famille nobles en Angleterre

$(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1 \dots Z_n)$

- $\forall n, \mathbb{E}(Z_n) < \infty$. vrai pour $n=0$; pour $n \geq 1$, on va le démontrer après avoir étudié l'espérance conditionnelle.

On utilise la définition de l'espérance conditionnelle pour des variables aléatoires ≥ 0

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_1^{(n)} + X_2^{(n)} \cdot \quad + X_{Z_n}^{(n)} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(n)} \mathbb{1}_{\{k \leq Z_n\}} | \mathcal{F}_n\right]$$

cv monotone pour l'espérance conditionnelle

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_k^{(n)} \underbrace{\mathbb{1}_{(k \leq Z_n)}}_{\text{mesurable } / \mathcal{F}_n} | \mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_k^{(n)} | \mathcal{F}_n) \mathbb{1}_{(k \leq Z_n)}$$

$\forall n$, Z_n est une fonction des $X_k^{(n-1)}$

$\to \mathcal{F}_n = \sigma(Z_0, Z_1 - Z_n) \subset \sigma(X_k^{(i)}, k \in \mathbb{N}, i \leq n-1)$

$\forall k$, $X_k^{(n)}$ est indép des $X_j^{(i)}$, $i \leq n-1$

$\to X_k^{(n)}$ est indep de $\sigma(X_j^{(i)}, i \leq n-1, j \in \mathbb{N})$

$\to X_k^{(n)}$ est indép de $\mathcal{F}_n \to \mathbb{E}(X_k^{(n)} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_k^{(n)}) = m$

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{\infty} m \mathbb{1}_{(k \leq Z_n)} = m Z_n$$

- si $m = 1$ $\quad \mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = Z_n$. En particulier $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}(Z_n)$ et par récurrence $\mathbb{E}(Z_n) = Z_0 < \infty$

  $\leadsto (Z_n)$ martingale

- si $m \neq 1$ $\quad m > 0$ on pose $M_n = \frac{Z_n}{m^n}$, $\to \mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$

  par récurrence, $\forall n$, $\mathbb{E}(M_n) < \infty \left(\Leftarrow \mathbb{E}(Z_n) < \infty\right)$ $= m^n Z_0$

  (M_n) est une martingale.

si $m \leq 1$, $\mathbb{E}(Z_{n+1} | \mathcal{F}_n) = m Z_n \leq Z_n$ surmartingale

$m \geq 1$ sous-martingale

Prop : (i) (X_n) martingale, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, convexe, telle que $\mathbb{E}(\varphi(X_n)) < \infty$ alors $(\varphi(X_n))$ est une sous-martingale

(ii) si (X_n) sous martingale, φ convexe, croissante de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, telle que $\mathbb{E}(\varphi(X_n)) < \infty$

alors $\varphi(X_n)$ sous-martingale

dém : (i) inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1})/\mathcal{F}_n) \geq \varphi(\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)) = \varphi(X_n)$$

(ii) $X_n \leq \mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)$

$$\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)) \geq \varphi(\mathbb{E}(X_{n+1}/\mathcal{F}_n)) \geq \varphi(X_n)$$

Transformation de martingale

déf : si $(\mathcal{F}_n)$ est une filtration, un processus (H_n) est prévisible par rapport à $(\mathcal{F}_n)$ si $\forall n$, H_n est borné et mesurable $/\mathcal{F}_{n-1}$

Prop : soit $(\mathcal{F}_n)$ une filtration, (X_n) processus adapté, (H_n) processus prévisible

On définit un nouveau processus $(H.X)_n$ par : $(H.X)_0 = 0$

$$n \geq 1 \quad (H.X)_n = H_1(X_1 - X_0) + H_2(X_2 - X_1) \dots + H_n(X_n - X_{n-1})$$

Alors, (i) si (X_n) est une martingale, $((H.X)_n)$ est une martingale

(ii) si (X_n) est une surmartingale et si $H_n \geq 0$ ps pour tout n, alors $((H.X)_n)$ est une surmartingale

exemple : (Y_n) v.a indépendantes, $\forall n$, $\mathbb{E}(Y_n) = 0$ $\quad \mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$, $X_n = Y_1 \dots + Y_n$

alors dans ce cas $(H.X)_n = H_1 Y_1 + H_2 Y_2 \dots + H_n Y_n$

$Y'_i = H_i Y_i$ représente le gain d'un joueur qui mise H_i au i-ème tour.

$(H.X)_n$ est le gain total après n tours

si on mise 10\$ sur pile au $n^{\text{ième}}$ tour et qu'on obtient pile, on gagne 10\$ au $n^{\text{ième}}$ tour. Sinon, on perd 10 \$. [$H_n \geq 0$ mise sur pile, ≤ 0 face]

(H_n) est prévisible : le montant qu'on mise ne dépend pas de Y_n : on ne connait pas Y_n

quand on mise.

<u>dém</u> (i) (H_n) bornées, $X_n \in L^1$, $\forall n$ $(H.X)_n = \underbrace{\underbrace{H_1}_{\text{borné}}\underbrace{(X_1 - X_0)}_{\in L^1}}_{\in L^1} + \dots + H_n(X_n - X_{n-1})$

$\in L^1$

(ii) (H_n) prévisible, (X_n) adapté, $(H.X)_n = \underbrace{\underbrace{H_1}_{\mathcal{F}_0\text{-mesurable}}\underbrace{(X_1 - X_0)}_{\mathcal{F}_1\text{-mesurable}}}_{\mathcal{F}_1\text{-mesurable}} + \dots + \underbrace{\underbrace{H_n}_{\mathcal{F}_{n-1}\text{mes.}}\underbrace{(X_n - X_{n-1})}_{\mathcal{F}_n\text{ mes}}}_{\mathcal{F}_n\text{ mes}}$

$\mathcal{F}_n$-mes.

(iii) $\mathbb{E}\left((H.X)_{n+1} / \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}\left(\underbrace{(H.X)_n}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}} + \underbrace{H_{n+1}}_{\mathcal{F}_n\text{-mes}}(X_{n+1} - X_n) / \mathcal{F}_n\right)$

$= (H.X)_n + H_{n+1} \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n)}_{0 \text{ car } (X_n) \text{ martingale } / \mathcal{F}_n}$

$= (H.X)_n$

<u>exple</u> : (Y_n) iid, $\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = -1) = \frac{1}{2}$, $X_n = Y_1 + \dots + Y_n$

un joueur parie sur pile / face au $n^{\text{ième}}$ tour si pile / face a été tiré au tour précédent $(Y_{n-1} = 1)$ / $(Y_{n-1} = -1)$

$H_n = Y_{n-1}$ le gain du joueur au $n^{\text{ième}}$ tour est

$\left.\begin{array}{ll} 1 \text{ si} & Y_n = Y_{n-1} \\ -1 \text{ si} & Y_n = -Y_{n-1} \end{array}\right\} \rightarrow$ ce gain au n^{ie} tour est $H_n Y_n = Y_{n-1} Y_n$

H_n est prévisible : $H = Y_{n-1}$ mesurable $/ \mathcal{F}_{n-1} = \sigma(X_1 \dots X_{n-1})$

<u>contre exemple</u> : $H_n = Y_n$ alors $(H.X)_n = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2 = n$ n'est pas une martingale. H_n non prévisible : H_n est une fonction de Y_n et n'est pas mesurable

/ $\mathcal{F}_{n-1} = \sigma(X_1, \dots X_{n-1}) = \sigma(Y_1, \dots Y_{n-1})$ car Y_n est indépendant de $(Y_1, \dots Y_{n-1})$.

Autre exemple de martingale : $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F}$ tribu borélienne, P mesure uniforme,

$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\mathbb{1}_{[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]}, 0 \le i \le 2^{n-1}\right)$

X v.a uniforme sur $[0,1]$, $M_n = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$

. (M_n) adaptée à $(\mathcal{F}_n)$

. $\forall n, \mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \to M_n \in L^1$

. $\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n)$ martingale

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$$

(Plus généralement, si X est une v.a L^1, $\mathcal{F}_n$ filtration, $(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n))$ est une martingale $/(\mathcal{F}_n)$)

Si X est uniforme dans $[0,1]$, X s'écrit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{2^k}$ avec $Y_k \in \{0,1\}$

$$X = 0{,}1100111110\dots$$

$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_0) = \frac{1}{2} = \mathbb{E}(X)$

$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_1) = \frac{1}{4}$ sur l'événement $X \in [0, \frac{1}{2}]$

$\frac{3}{4}$ sur l'événement $X \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$Y_1 = \mathbb{1}_{X \in [\frac{1}{2}, 1]}$, $Y_2 = \mathbb{1}_{X \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]} + \mathbb{1}_{X \in [\frac{3}{4}, 1]}$

$Y_3 = \mathbb{1}_{X \in [\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]} + \dots$

Y_1 est $\mathcal{F}_1$-mes, Y_2 est $\mathcal{F}_2$-mes, .. Y_n est $\mathcal{F}_n$-mes

Y_n est indép $\mathcal{F}_{n-1}$

$$\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{2^k} \,\Big|\, \mathcal{F}_n\right) \overset{\text{cv dominée}}{=}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(\frac{Y_k}{2^k} \,\Big|\, \mathcal{F}_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_k \mid \mathcal{F}_n)}{2^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{2^k} + \sum_{k \geq n+1} \frac{\overbrace{\mathbb{E}(Y_k)}^{1/2}}{2^k}$$