I Optique géométrique

Keller.

Helmholtz $(\Delta + k^2) u = 0$

Anzats
$$u(x,k) = a(x,k)\, e^{ik\varphi(x)}$$

$$\Delta u = \left[\Delta a + 2ik \nabla\varphi \nabla a + ik\Delta\varphi\, a - k^2 (\nabla\varphi)^2 a\right] e^{ik\varphi}$$

Equation eikonale
$$(\nabla\varphi)^2 = 1$$

$$(\Delta + k^2) u = \left[\Delta a + 2ik\left[\nabla\varphi\nabla a + \frac{1}{2}\Delta\varphi\, a\right]\right] e^{ik\varphi}$$

Equation pour le terme principal
$$\nabla\varphi\nabla a_0 + \frac{1}{2}\Delta\varphi\, a_0 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} (\nabla\varphi)^2 = 1 \Rightarrow \\ \mathrm{Hess}\,\varphi \cdot \nabla\varphi = 0 \\ \text{et de plus} \\ \frac{d}{ds}\left(\nabla\varphi(x(s))\right) = 0 \end{array}}$$

$$\operatorname{div}(a_0^2 \nabla\varphi) = 0$$

conservation de l'énergie sur les tubes de rayon.

Rayons de l'optique géométrique
$$\frac{dx}{ds} = \nabla\varphi(x(s)) \qquad x(0) = x_0$$

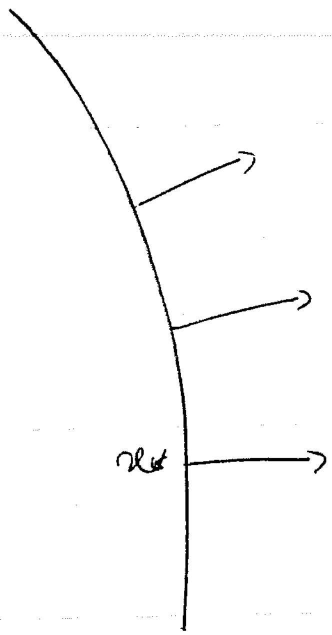
$$\frac{d}{ds}\left(\varphi(x(s))\right) = \nabla\varphi(x(s)) \cdot \frac{dx}{ds} = \left(\nabla\varphi(x(s))\right)^2 = 1$$

$$\varphi(x(s)) = \varphi(x_0) + s$$

$$\text{et} \quad \frac{d}{ds}\left(\nabla\varphi(x(s))\right) = \sum_j \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j}\frac{dx_j}{ds} = \underbrace{\sum_j \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\Big|_{x(s)}}_{=0}$$

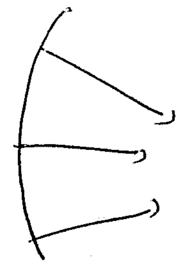
Les rayons de l'O.G se propagent en ligne droite.

$$\text{et} \quad x(s) = x_0 + s\nabla\varphi(x_0)$$



$\varphi = \varphi(x_*)$

rayons de l'optique géométrique, sur $\nabla\varphi$ comme direction, orthogonaux à $\varphi = \text{cste}$.



Si on regarde Helmholtz comme la transformée de Fourier partielle en temps de l'équation des ondes.

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ik(\varphi(x)+t)}\, a(x,k)\, dk$$

Paley Wiener Schwartz

Theorem If $a(x,k)$ is holomorphic in $\operatorname{Im} k<0$, then $v(x,t) = 0$ for $\varphi(x)+t < 0$

La courbe $\varphi(x) = -t$ est donc le front de l'onde dans ce cas.

Calcul de l'amplitude (optique géométrique)

$$\frac{d}{ds}\left[a_0(x(s))\right] = \frac{dx}{ds}\cdot\nabla a_0 = \nabla\varphi\,\nabla a_0 = -\frac{1}{2}\Delta\varphi\, a_0.$$

Calcul de l'amplitude

$$\Delta\varphi = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Hess}\,\varphi)$$

Comme $(\nabla\varphi)^2 = 1$, $\nabla\varphi$ est un vecteur normal unitaire à $\Sigma = \{\varphi(x) = \varphi(x_0)\}$.

Alors, comme le gradient du vecteur normal unitaire, qui est tangent à Σ, donne les courbures de Σ, et donc on trouve

$$\Delta\varphi = K_1 + K_2 \quad \text{(courbures principales)}$$

La surface $\Sigma_{-t} = \{\varphi(x) = -t\}$ est alors

obtenue comme $\{x + t\nabla\varphi(x),\ x \in \Sigma_0\}$

Si $\gamma(u)$ est une courbe sur Σ_0, on définit

$\gamma_{-t}(u)$ comme son image

par la transformation.

et on trouve

$$\mathrm{Hess}\,\varphi\,(\gamma_{-t}(0)) = \mathrm{Hess}\,\varphi\,(\gamma_0(0))\,(\mathrm{Id} + tW(\gamma_0(0)))^{-1}$$

d'où la formule finale.

$$\frac{d}{ds}\big(a_0(x(s))\big) + \frac{d}{ds}\Big(\ln\big(\det\big(I + sW(x(0))\big)\big)\Big)\,a_0(x(s)) = 0$$

soit $a_0(x(s)) = a_0(x(0))\,(1+K_1 s)^{-1}(1+K_2 s)^{-1}$

$\longrightarrow$ problème dit de caustique si l'un des deux nombres est nul

Construire une solution à partir d'une solution asymptotique.

1. $a_j(x)$ donnés par une cascade d'équations de transport inhomogène
2. lemme de Borel construit v : $a(x,k)$ ayant $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)(ik)^{-j}$ comme D.A.
3. construction d'une solution exacte possible si $u|_{\Sigma_0} = v|_{\Sigma_0}$

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)(v + r) = 0 \\ r|_{\Sigma_0} = 0 \end{cases}$$

<u>Problèmes plus généraux</u>

$$\mathrm{div}(A(x)\nabla f) - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad A \text{ matrice ou scalaire.}$$

exemples : élasticité, électromagnétisme, ondes dans un milieu à indice variable.

TF $\quad \mathrm{div}(A(x)\nabla u) + k^2 u = 0$

Asymptotique formelle.

$$u = a(x,k)\, e^{ik\varphi(x)} \qquad \nabla u = (\nabla a + ik a \nabla\varphi)\, e^{ik\varphi}$$

$$\mathrm{div}(A(\nabla a + ik a\nabla\varphi)) + ik\nabla\varphi (A(\nabla a + ika\nabla\varphi)) + k^2 a = 0$$

Eikonale : $1 - \nabla\varphi\cdot(A\nabla\varphi) = 0$

Transport : $\mathrm{div}(a_0 A\nabla\varphi) + (\nabla\varphi A \nabla a_0) = 0$

Encore plus simple :

$$c^{-2}(x) = c_0^{-2} + dx$$

$$\Delta f - c^{-2}(x)\partial_{t^2}^2 f = 0$$

TF en t, y, z.

$$\hat{f}'' + (\omega^2 c_0^{-2} - k_2^2 - k_3^2 + d\omega^2 x)\hat{f} = 0$$

Solution exacte unique (à une constante près

$$\hat{f}(x) = A(\omega, k_2, k_3)\, Ai\left(-(d\omega^2)^{1/3}\left(x + \frac{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_2^2 - k_3^2}{d\omega^2}\right)\right)$$

$c^{-2}(x, y, z)$???

$$(\nabla\varphi)^2 = c^{-2}(x, y, z)$$

on ne peut plus raisonner de manière aussi simple que précédemment.

II Bicaractéristiques

$$p(x, \vec{\xi}) = -\xi^2 + c^{-2}(x, y, z) \qquad p(x, \vec{\xi}) = -1 + A(x)\vec{\xi}.\vec{\xi}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{x}}{ds} = \dfrac{\partial p}{\partial \vec{\xi}} \\ \dfrac{d\vec{\xi}}{ds} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

construit une courbe de $\mathbb{R}^{2d}$ telle que

$$p(x(s), \vec{\xi}(s)) = p(x(0), \vec{\xi}(0))$$

Si, de plus, il existe φ telle que

$$\vec{\xi}(s) = \nabla\varphi(x(s))$$

alors $p(x(s), \nabla\varphi(x(s))) = 0$: solution de l'équation eikonale.

Dessin de la caustique

$d<0$ (vitesse croissante)

$$p(x,\xi) = c_0^{-2} - dx - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2$$

$$\frac{dx_1}{ds} = -2\eta_1 \qquad \frac{d\eta_1}{ds} = d \qquad \eta_2 = \eta_2^0$$

$$\frac{dx_2}{ds} = -2\eta_2 \qquad \frac{d\eta_2}{ds} = 0 \qquad \eta_3 = \eta_3^0$$

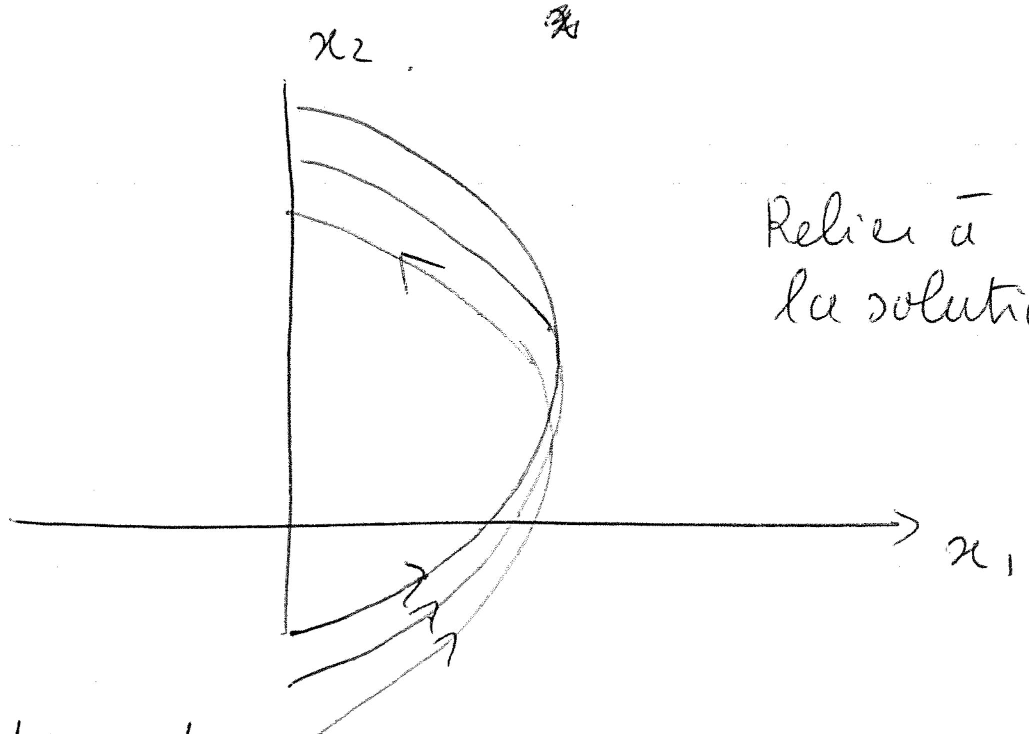
$$\frac{dx_3}{ds} = -2\eta_3 \qquad \frac{d\eta_3}{ds} = 0 \qquad \eta_1 = \eta_1^0 + ds$$

$$x_2 = x_2^0 - 2\eta_2^0 s$$

$$x_3 = x_3^0 - 2\eta_3^0 s$$

(mettons dans le plan)

$$\frac{dx_1}{ds} = -2(\eta_{10} + ds) \qquad x_1 = x_1^0 - 2\eta_1^0 s - ds^2$$



Relier à la solution ?

Utilisation de

$$Ai(x) + e^{\frac{2i\pi}{3}} Ai(e^{2i\pi/3}x) + e^{-2i\pi/3} Ai(e^{-2i\pi/3}x) = 0$$

qui permet de comprendre $Ai(x)$ comme la somme d'une onde en $e^{-\frac{2}{3}ik(x_+)^{3/2}}$ et $e^{\frac{2}{3}ik(x_+)^{3/2}}$.

III Opérateurs pseudodifférentiels

$$Pu = \mathrm{div}(A(x)\nabla u) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Soit
$$u = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int \hat{u}(\xi, \tau)\, e^{i(t\tau + x.\xi)}\, d\xi\, d\tau.$$

$$Pu = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int \hat{u}(\xi,\tau) \left[\tau^2 - \sum a_{ij}(x)\,\xi_i \xi_j + i \sum_{i,j} \partial_i a_{ij}\, \xi_j\right] e^{i(t\tau + x.\xi)}\, d\xi\, d\tau.$$

Exemple modèle : P est dit pour avoir pour symbole
$$p(x,\xi) = \tau^2 - \sum a_{ij}(x)\,\xi_i\xi_j + i \sum_{i,j} \partial_i a_{ij}\,\xi_j = p_2 + p_1.$$

Généralisation.

Soit p_m un symbole homogène en ξ de degré m

ou $p = p_m + p_{m-1} + \dots + p_1 + p_0 + \dots$

(par exemple $\sqrt{\xi_1^2 + 2\,\xi_2^2}$)

On définit $Op(p)$ par

$$\widehat{Op(p)u}\,(\xi) = p(\xi)\,\hat{u}$$

ou, plus généralement
$$Op(p)\,u\,(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int p(x,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,e^{ix\xi}\, d\xi.$$

c'est à dire

$$Op(p)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \iint p(x,\xi)\, u(y)\, e^{i(x-y)\xi}\, dy\, d\xi$$

intégrale oscillante.

(définie comme une distribution)

<u>Explication rapide</u>

i) Soit p homogène de degré m, φ homogène de degré 1, $m < -d$ (dimension de l'espace)

$$\iint p(x,\xi)\, v(x)\, e^{i\varphi(x,\xi)}\, dx\, d\xi$$

est bien définie pour $v \in C^\infty_0(\mathbb{R}^d)$

(en effet, $|p(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^m$ et l'intégrale converge)

$$v \longmapsto \iint p(x,\xi)\, v(x)\, e^{i\varphi(x,\xi)}\, dx\, d\xi$$

définit donc une distribution.

ii) Si $(\nabla_x \varphi)^2 + (\nabla_\xi \varphi)^2 \geq c_0 > 0$ alors ceci reste valable pour tout m (pas forcément de degré $< -d$)

Pourquoi? $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right] e^{i\varphi} = i|\nabla\varphi|^2 e^{i\varphi}$.

$$\iint_{K^2} p(x,\xi)\, v(x)\, e^{i\varphi(x,\xi)}\, dx\, d\xi = \iint \frac{p(x,\xi)\, v(x)}{i|\nabla\varphi|^2} \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\right] e^{i\varphi}$$

et on fait une IPP (pas de TB sur v.

Utilisation principale 1

i) Composition en ayant une formule pour les symboles.

$$Op(q) \circ Op(p) = Op(q \# p) + \text{reste } \infty$$

$$q \# p = \sum \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha q \, \partial_x^\alpha p.$$

ii) Inversion d'un opérateur elliptique.

$$|e(x,\xi)| \geq C \|\xi\|^m \qquad (\text{degré } m).$$

$$q \# e = 1 + O(-\infty)$$

$$q_0 e_0 = 1, \quad \sum_{|\alpha|=1} \partial_\xi^\alpha q_0 \, \partial_x^\alpha e_0 + q_1 e_0 + q_0 e_1 = 0$$

$\longrightarrow$ détermine q_1.

$$q_1 = -\frac{e_1}{e_0^2} + \sum_{|\alpha|=1} \frac{\partial_\xi^\alpha e_0 \, \partial_x^\alpha e_0}{e_0^3}$$

On peut alors, avec q, réécrire.

$$e\, u = f$$

$$Op((q \# e))u = Op(q) f$$

$$Op(1 + r)\, u = Op(q) f$$

$\rightarrow$ série de Neumann exacte

$$u = \sum Op(r)^n \, Op(q) f.$$

iii) Equation de transport (hyperbolique)

$p(x,\xi) = 0$ ssi $\xi_1 = \ell(x,\xi')$

$\Rightarrow p(x,\xi) = e(x,\xi)(\xi_1 - \ell(x,\xi'))$

$pu = f \iff$

$Op[(\xi_1 - \ell(x,\xi'))]u = Op(q) f. \iff \boxed{\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial x_1} - Op(\ell, x_1, x', \xi')u = g}$

II Notion de front d'onde et l'application aux variétés lagrangiennes.

$(x_0, \xi_0) \in T^*X \notin WF(A)$ ssi

$\exists \chi$, localisant au voisinage de x_0 tel que $\widehat{\chi A}$ est à décroissance rapide dans un cône autour de ξ_0.

$\hookrightarrow$ relié avec le support singulier de A.

Application $\quad u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int a(x,k)\, e^{ik(\varphi(x)+t)} dk$

qui est supporté dans $\varphi(x) + t < 0$ a son support singulier sur $\varphi(x) + t = 0$, et les directions sont $(\tau_0, \tau_0 \nabla\varphi(x_0))$.

Preuve.

$$\hat{u}(\xi,\tau) = \frac{1}{2\pi}\iiint \chi(x,t)\, a(x,k)\, e^{ik\varphi(x)+ikt-i\tau t-i\xi x}\, dk\, dx\, dt.$$

Intégrale en k, t $\simeq$ Fourier - Fourier inverse.

$$\hat{u}(\xi,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{\chi}(x,\tau)\, a(x,\tau)\, e^{i\tau\varphi(x)-i\xi x}\, dx$$

Théorème de la phase stationnaire

$$\nabla_x(\tau\varphi(x)-\xi.x) = 0$$

$$\tau\nabla_x\varphi(x_0)-\xi = 0.$$

Qu'est le théorème de la phase stationnaire?

i) $$\int e^{ik\varphi(x)}\, \sigma(x,k)\, dx \simeq O(k^{-\infty}) \text{ si } \nabla\varphi(x) \neq 0$$

(théorème de la phase non stationnaire)

ii) $$\int e^{ik\varphi(x)}\, \sigma(x,k)\, dx \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\left[\sigma(x_0,k) + O(k^{-1})\right] e^{ik\varphi(x_0)}$$

si $\nabla\varphi(x_0)=0$, $\mathrm{Hess}\,\varphi(x_0)\neq 0$

(intégrale gaussienne)

V. Théorème de propagation des singularités

(a) Cela ne s'applique pas pour un opérateur dont le symbole est $\geq c|\xi|^m$ (elliptique)

(b) S'applique si la variété $p(x,\xi)=0$ est de dimension non nulle. $(2d-1)$.
donc si $(\nabla_x p, \nabla_\xi p)$ non $\vec{0}$

Théorème Soit u une solution de

$$Op(p)u = f$$

Supposons que le point (x_0,ξ_0) engendre une bicaractéristique $\gamma_p(x_0\,\xi_0)$, courbe intégrale de $H_p = \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi}$, et que $WF(f) \cap \gamma p(x_0,\xi_0) = \emptyset$

Alors, soit $\gamma p(x_0,\xi_0) \cap WF(u) = 0$

soit $\gamma p(x_0,\xi_0) \subset WF(u)$.

Version 2 Une bicaractéristique qui rencontre une variété lagrangienne Λ est contenue dans cette variété lagrangienne Λ

$\Lambda \subset \{p=0\}$

(variété lagrangienne : $\underset{\text{maximale}}{\dim \Lambda = d}$, $\underset{\text{isotrope}}{\sigma|_\Lambda = 0}$)

$\sigma = dx \wedge d\xi$

solution lagrangienne $p|_\Lambda = 0$ en plus.

On revient aux variété lagrangiennes (ah, je n'en ai pas parlé ? Mais si)

$$\Lambda_\varphi = \{ (x, \nabla\varphi(x)) , x \in V \}$$ est une variété lagrangienne car

$$dx \wedge d\xi \Big|_{\Lambda_\varphi} = 0$$

(explication $\xi_i = \nabla_i \varphi$

$$d\xi_i = \sum_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} dx_j$$

$$dx_i \wedge d\xi_i = \sum_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} dx_i \wedge dx_j$$

et (i,j) s'annule avec (j,i) par le lemme de Schwarz)

<u>Théorème</u> $e^{sH} \Lambda_\varphi$ est une variété lagrangienne

Une phase solution de $p_m(x, \nabla\varphi) = 0$ définit donc une variété lagrangienne.

Exemple $\xi^2 + x = C$

$(\partial_x \varphi)^2 + x = C \longrightarrow$ non resoluble pour $x = C$

$(\partial_\xi H, \xi) \qquad \xi^2 + \partial_\xi H = C$

$\longrightarrow$ plus de problème pour $x = C$

puisque $H = C\xi - \frac{\xi^3}{3}$

$$\int e^{i\varphi} dx \quad \int e^{iH} d\xi$$

airy

Réflexion et propagation des singularités

1 Coordonnées semi géodésiques

$$\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \sum_{i,j} g_{ij}(x_n, x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{partie principale}} + \sum_i b_j(x_n, x)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x_n, x)$$

Dans ces coordonnées :

2 deux opérateurs de propagation

$$\frac{\partial \varphi_\pm}{\partial x_n} = \pm\sqrt{1 - \sum_{i,j} g_{ij}(x_n, x)\frac{\partial \varphi_\pm}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi_\pm}{\partial x_j}},$$

symboles

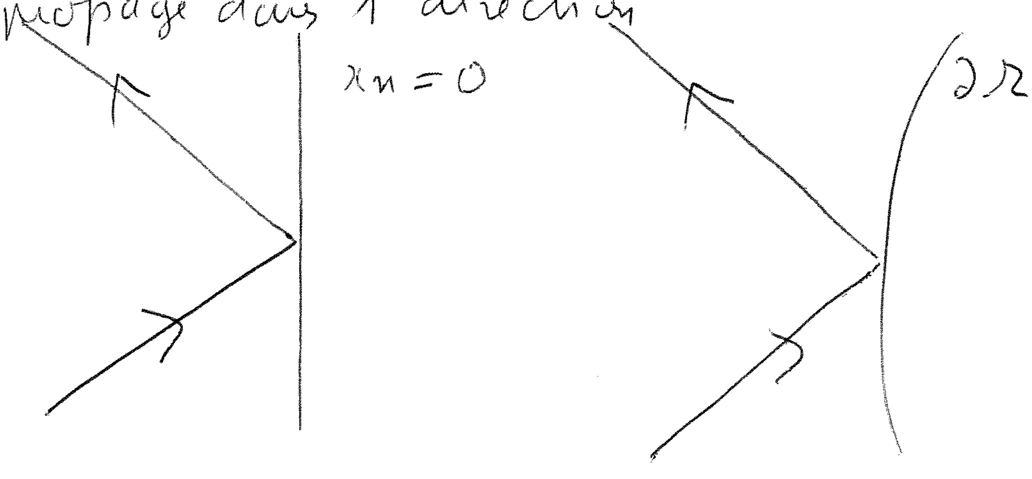
$$A_\pm(f)(x_n, x) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^d \iint e^{i\omega[\varphi_\pm(x_n, x, \xi) - iy\cdot\xi]} \sigma_\pm(x_n, x, \xi, \omega) f(y)\,dy\,d\xi$$

$$\varphi_\pm(0, x, \xi) = x\cdot\xi$$

$$\sigma_\pm(0, x, \xi, \omega) = 1.$$

de sorte que $A_\pm(f)\big|_{x_n=0} = f.$

Chacun propage dans 1 direction



Théorème de propagation des singularités
(C^∞)

Opérateur $\xi_n^2 + R(x_n, x', \xi') = p(x_n, \xi_n, x', \xi')$.

* Si $R(x_n^0, x'_0, \xi'_0) < 0$ on dit qu'on est dans la région elliptique
* Si $R(x_n^0, x'_0, \xi'_0) > 0$ on dit qu'on est dans la région hyperbolique
* Si $R(0, x'_0, \xi'_0) = 0$ on dit qu'on est dans la région glancing

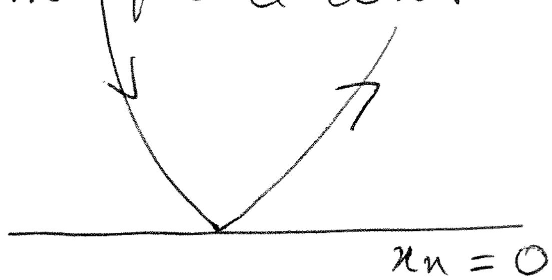
Si (x'_0, ξ'_0) est dans l'hyperbolique

$(0, x'_0, \pm\sqrt{R(0, x'_0, \xi'_0)}, \xi'_0)$ sont deux points de la variété caractéristique par laquelle passent deux bicaractéristiques γ_+ et γ_-

On considère

$$\gamma = (\gamma_- \cap \{x_n > 0\}) \cup (\gamma_+ \cap \{x_n > 0\})$$

γ s'appelle une bicaractéristique généralisée et le théorème précédent est toujours vrai



Que se passe-t-il au glancing

<u>Théorème.</u> Soit $\Omega^c = \{\psi > 0\}$

et p un opérateur.

(le glancing est caractérisé par
$$\psi = 0,\ p = 0,\ \{\psi, p\} = 0\ )$$

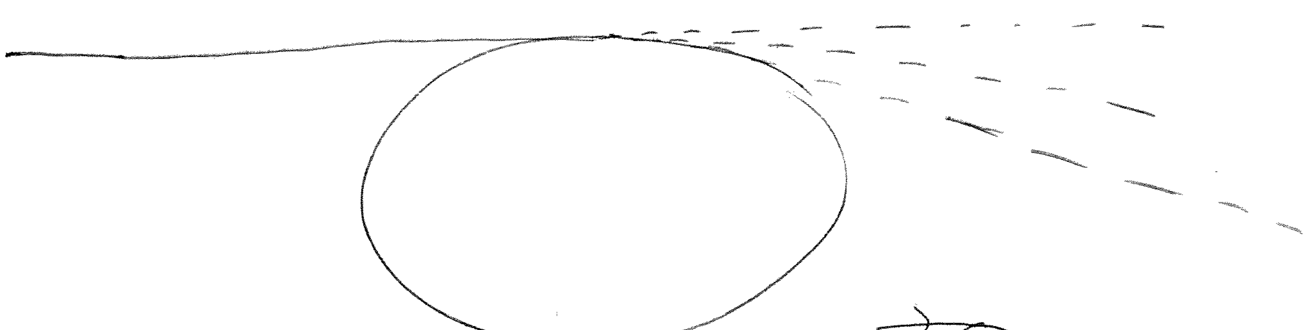
les points sont strictements diffractifs.

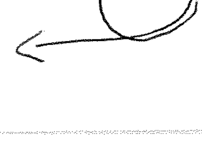
$$\frac{\{\{\psi, p\}, p\}}{\{\{\psi, p\}, \psi\}} > 0$$

On appelle bicharactéristique généralisé un objet $\gamma_- \cup \tilde{\gamma} \cup \tilde{\gamma}_+$ γ_-, γ_+ bicaractéristiques de $P - \partial_t^2$, $\tilde{\gamma}$ bicaractéristique de $R|_{\psi=0} - \partial_t^2$, $\gamma_- \cap \tilde{\gamma} = \{\rho_0\}$.

$$\rho_+^0 = \tilde{\gamma} \cap \tilde{\gamma}_+$$

$$\rho_0 \in WF^a(u) \Rightarrow \forall \tilde{\gamma},\ \gamma_- \cup \tilde{\gamma} \cup \tilde{\gamma}_+ \subset WF^a(u)$$





Théorème

$$u_d(n,\theta,k) = \frac{a_i(0,\theta_0,k)\, e^{ik\varphi(0,\theta_0)}\, e^{i\pi/3}}{2\pi\,(Ai'(-\omega))^2}$$

$$\int e^{ik[(\theta-\beta)\tau + \varphi_0(n,\theta,\tau)] + ik^{1/3}(H(\theta_0)-H(\beta))} \left(\frac{kR(s(\theta_0))}{2}\right)^{1/3}$$

$$H(\beta) - H(\theta_0) = -e^{2i\pi/3}\,\omega \int_{\theta_0}^{\beta} \left(\frac{R(s(\theta))}{2}\right)^{1/3} d\theta.$$

où $u_i(0,\theta_0,k) = a_i(0,\theta_0,k)\, e^{ik\varphi(0,\theta_0)}$

Pourquoi ?

on écrit u_d comme une intégrale oscillante.

Alors on trouve $\int e^{ik(\frac{\xi^3}{3}+y\xi)}\, \hat{u}_d(\xi)\, d\xi = f.$

soit $Ai(k^{2/3}\xi_1)\,\hat{u}_d(\xi_1) = \hat{f}(\xi_1)$

ou encore $(k^{2/3}\xi_1 + \omega)\,\hat{u}_d(\xi_1) = \hat{f}(\xi_1)$

qui est une équation de transport

modulo une perturbation

Précisément (opérateur modèle de Friedlander)

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - (1+x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0 \\ u(0,y_1,y_2) = f(y_1,y_2). \\ u|_{x<0} = 0 \end{array}\right.$$

Plein d'extensions

1) Systèmes hyperboliques

$$L(x,t,D_x,D_t)\,U = 0$$

$$U = A\, e^{i\varphi(x,t)/\varepsilon}.$$

$$\left[L(x,t,D_x,D_t)A + \frac{i}{\varepsilon} L(x,t,\partial_x\varphi,\partial_t\varphi)A\right] e^{i\frac{\varphi}{\varepsilon}} = 0$$

$$L(x,t,\partial_x\varphi,\partial_t\varphi)A_0 = 0 \implies A_0 \in \operatorname{Ker}\left(L(x,t,\partial_x\varphi,\partial_t\varphi)\right)$$

$$\implies \det L(x,t,\partial_x\varphi,\partial_t\varphi) = 0$$

et on choisit une feuille

$$L(x,t,D_x,D_t)A_0 + i\, L(x,t,\partial_x\varphi,\partial_t\varphi)A_1 = 0$$

avec $\pi A_0 = A_0$ $\quad\pi$: projection sur le noyau parallèlement à l'image. (orthogonaux si L symétrique)

$$A_1 = \pi A_1 + (I-\pi)A_1.$$

$$L(x,t,D_x,D_t)A_0 + i\, L(x,t,\partial_x\varphi,\partial_t\varphi)(I-\pi)A_1 = 0$$

$$\implies (I-\pi)L(x,t,D_x,D_t)A_0 + i\,(I-\pi)L(x,t,\partial_x\varphi,\partial_t\varphi)(I-\pi)A_1 = 0$$

$$\implies \pi L(x,t,D_x,D_t)A_0 = 0$$

$$\begin{cases} \pi L(x,t,D_x,D_t)\pi A_0 = 0 \\ \pi A_0 = A_0. \end{cases}$$

$$\implies \left[\pi L(x,t,D_x,D_t)\pi + (I-\pi)L(x,t,D_x,D_t)(I-\pi)\right] a_0 = 0$$

symétrique hyperbolique.

Rayons gaussiens

$$A(s)\, e^{ik\left[S(s) + (x-\gamma(s))\cdot p(s) + \frac{1}{2}(x-\gamma(s))^T \Pi(s)(x-\gamma(s))\right]} = v(x,y)$$

où $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\gamma(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$. $p(s) = \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix}$

et Π a une partie imaginaire

avec $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} \Leftrightarrow (y_0\, s)$.

Model case.

$$\left[\Delta + k^2(1-x)\right] u = ik\,\delta(x) f(y)$$

$$S(s) = S_0 + 2s - 2s^2 \xi_0 + \frac{2}{3} s^3.$$

$x(s) = 2s\,\xi_0 - s^2$ $\quad p(s) = \xi_0 - s$

$y(s) = y_0 + 2s\,\eta_0.$ $\quad q(s) = \eta_0.$