Corrigé de l'examen de probabilités, USTC 2022

Ce sujet est un spécialisation au cas de la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ d'un article plus général sur les chaines de Markov : "Evolving sets, mixing and heat kernel bounds" de Ben Morris et Yuval Peres.

Les questions I 1, I 2, I 3 et II 1 sont élémentaires. Les questions II 2 et III 1 se font facilement par récurrence sur n.

II 3 Posons $W_{-1} = \emptyset$ et $W_k = [-k, k+1]$ pour $k \geq 0$. Pour tout $n \geq 0$, si $E_n = W_{-1}$, alors $E_{n+1} = W_{-1}$. De plus, pour tout $k \geq 0$ et tout $n \geq 0$, conditionnellement à $E_n = W_k$, $E_{n+1} = W_{k+1}$ si $V_{n+1} = 1$ et $E_{n+1} = W_{k-1}$ si $V_{n+1} = 2$. Or les variables V_i sont iid. Donc E_n est bien une chaine de Markov avec probabilités de transition

$$P(W_{-1}, W_{-1}) = 1$$

et pour $k \geq 0$

$$P(W_k, W_{k-1}) = P(W_k, W_{k+1}) = 1/2$$

II 4 Pour tout n, $F_{n+1} = \sigma(F_n, U_{n+1})$. Ainsi la suite de tribus (F_n) est croissante, c'est donc une filtration. De la question II 3, il ressort que $M_n/2$ est une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ issue de 1 et arrêtée au premier temps d'atteinte de 0. Or la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$ est une martingale et le premier temps d'atteinte de 0 est un temps d'arrêt. Par le théorème d'arrêt, (M_n) est donc une martingale pour (F_n).

II 5 D'après la question précédente, on est ramené à un problème de temps d'atteinte pour la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, c'est dans le cours. On a $\mathbb{P}(T_0 \leq T_N) = (N-1)/N$.

III 2 Posons $V_{-1} = \emptyset$. Par le même raisonnement qu'en II 3, on trouve

$$P(V_{-1}, V_{-1}) = 1$$

et pour $k \geq 0$

$$P(V_k, V_{k-1}) = P(V_k, V_{k+1}) = 1/2$$

III 3 Même argument que II 4
III 4 On a

$$\mathbb{P}(x-1 \in E_n) + \mathbb{P}(x+1 \in E_n) = \mathbb{P}(\{x-1 \in E_n\} \cup \{x+1 \in E_n\}) + \mathbb{P}(\{x-1 \in E_n\} \cap \{x+1 \in E_n\})$$

Or

$$\mathbb{P}(x \in E_{n+1}) = \mathbb{P}(\{U_{n+1} = 1\} \cap (\{x-1 \in E_n\} \cup \{x+1 \in E_n\})) + \mathbb{P}(\{U_{n+1} = 2\} \cap (\{x-1 \in E_n\} \cap \{x+1 \in E_n\}))$$

Par indépendance des variables U_i,

$$\mathbb{P}(\{U_{n+1}=1\}\cap(\{x-1\in E_n\}\cup\{x+1\in E_n\}))=\mathbb{P}(\{U_{n+1}=1\})\mathbb{P}(\{x-1\in E_n\}\cup\{x+1\in E_n\})$$

et ainsi

$$\mathbb{P}(\{U_{n+1}=1\}\cap(\{x-1\in E_n\}\cup\{x+1\in E_n\}))=\frac{1}{2}\mathbb{P}(\{x-1\in E_n\}\cup\{x+1\in E_n\})$$

De même,

$$\mathbb{P}(\{U_{n+1}=2\}\cap(\{x-1\in E_n\}\cap\{x+1\in E_n\}))=\frac{1}{2}\mathbb{P}((\{x-1\in E_n\}\cap\{x+1\in E_n\}))$$

III 5 C'est vrai pour $n=0$ et si c'est vrai pour n,

$$\mathbb{P}(S_{n+1}=x)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=x-1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_n=x+1)=\frac{1}{2}[\mathbb{P}(x+1\in E_n)+\mathbb{P}(x-1\in E_n)]=\mathbb{P}(x\in E_{n+1})$$

IV 1 Soit F_n la filtration engendrée par $M_0, M_1 \dots M_n$. On a

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|F_n)=\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{x\in E_n+1\}}|F_n)$$

Or l'événement $\{x\in E_n+1\}$ est la réunion disjointe de quatre événements :
–l'événement $\{x+1\in E_n, x-1\in E_n, U_{n+1}=1\}$
–l'événement $\{x+1\in E_n, x-1\in E_n, U_{n+1}=2\}$
–l'événement $\{x+1\in E_n, x-1\notin E_n, U_{n+1}=1\}$
–l'événement $\{x+1\notin E_n, x-1\in E_n, U_{n+1}=1\}$
De plus, pour tous événements A et B, on a $\mathbf{1}_{A\cap B}=\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$. On en déduit

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{x+1\in E_n, x-1\in E_n, U_{n+1}=1\}}|F_n)=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{x+1\in E_n, x-1\in E_n\}}\mathbf{1}_{\{U_{n+1}=1\}}|F_n)$$

L'événement $\{x+1\in E_n, x-1\in E_n\}$ est mesurable par rapport à F_n, donc

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{x+1\in E_n, x-1\in E_n\}}\mathbf{1}_{\{U_{n+1}=1\}}|F_n)=\mathbf{1}_{\{x+1\in E_n, x-1\in E_n\}}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{U_{n+1}=1\}}|F_n)$$

De plus, U_{n+1} est indépendante de F_n, donc

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{U_{n+1}=1\}}|F_n)=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{U_{n+1}=1})=1/2$$

Donc

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{x+1\in E_n, x-1\in E_n, U_{n+1}=1\}}|F_n)=\frac{1}{2}\mathbf{1}_{\{x+1\in E_n, x-1\in E_n\}}$$

On obtient une égalité analogue pour les trois autres événements mentionnés plus haut, on fait la somme et en utilisant III 5, on trouve

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|F_n)=\frac{1}{2}\left[\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbf{1}_{\{x+1\in E_n\}}+\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbf{1}_{\{x-1\in E_n\}}\right]$$

D'où finalement

$$\mathbb{E}(M_{n+1}|F_n) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{\{x\in E_n\}} = M_n$$

IV 2 La martingale positive M_n converge presque sûrement et comme elle est à valeurs entières, presque sûrement, à partir d'un certain rang elle est constante. Il suffit de voir (comme pour les processus de branchement) qu'elle ne peut stationner qu'en 0.

Pour cela, il suffit de montrer que la chaine de Markov (E_n) n'admet pas de composante irréductible dont tous les éléments ont même cardinal, à part l'ensemble vide.

Soit donc G un sous-ensemble non vide de $\mathbb{Z}$, de cardinal fini, soit a son plus petit élément, b son plus grand élément et soit $m = b - a + 1$. Supposons que $E_n = G$. Alors sur l'événement $U_{n+1} = U_{n+2} = \ldots = U_{n+(m/2)} = 2$, qui a probabilité strictement positive, le plus petit élément de E_{n+1} est $\geq a + 1$ et le plus grand élément de E_{n+1} est $\leq b-1$, le plus petit élément de E_{n+2} est $\geq a+2$ et le plus grand élément de E_{n+2} est $\leq b-2$, etc. On en déduit que $E_{n+(m/2)} = \emptyset$ et ainsi $M_{n+(m/2)} = 0$. Donc G n'est pas dans une composante irréductible de la chaine de Markov (E_n) dont tous les éléments ont même cardinal.

IV 3 Par récurrence, pour tout n, (E_n) est un ensemble fini. La formule

$$E_n = \{k \in \mathbb{Z}, Card(\{k-1, k+1\} \cap E_{n-1}) \geq U_n\}$$

implique que pour tout $n \geq 1$, la loi de (E_n) sachant $E_0, E_1 \ldots E_{n-1}$ est égale à la loi de (E_n) sachant E_{n-1}. Donc (E_n) est une chaine de Markov à valeurs dans l'ensemble A des parties finies de $\mathbb{Z}$ et A est dénombrable. La question IV 2 montre que $\emptyset$ est un état récurrent et que tous les autres états sont transitoires.

IV 4 On a vu dans le cours que tout temps d'atteinte est un temps d'arrêt. Le fait que T soit presque sûrement fini a été vu en IV 2

IV 5 En utilisant les mêmes arguments qu'en II 3, on voit que pour $n \leq R$, E_n est soit l'ensemble vide, soit de la forme

$$[-m, m+1] \cup [2k-m, 2k+m+1] \qquad (*)$$

avec $0 \leq m \leq k-1$.

Si $E_R = \emptyset$, on a $T = R$. Sur l'événement $E_R = [-(k-1), 3k]$, pour $n \geq R$, E_n est soit l'ensemble vide, soit de la forme

$$[k-i, k+i+1]$$

En appliquant la propriété de Markov forte au temps R, on voit que sur l'événement $E_R = [-(k-1), 3k]$, on a $T = R + R'$ avec $R' = \inf\{n, E_{R+n} = \emptyset\}$. On a donc

$$T = R + \mathbf{1}_{E_R = [-(k-1),3k]} R' \qquad (**)$$

De plus, en utilisant les arguments de II 4, pour $n \leq R$, $(M_n/4)$ suit la loi d'une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$, issue de 1 et arrêtée au temps d'atteinte de $\{0, k\}$. Donc R a même loi que $\tau_{\{0,k\}}$ dans l'énoncé.

De même, en appliquant la propriété de Markov forte au temps R, on voit que sur l'événement $E_R = [-(k-1), 3k]$, $(M_{n+R}/2)$ suit la loi d'une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ issue de k, arrêtée au temps d'atteinte de 0 et indépendante de la tribu F_R. Donc R' a même loi que τ'_0 dans l'énoncé. Ceci combiné à (**) donne le résultat.