

Théorème (McShane - Mirzakhani)

Pour toute surface hyperbolique de genre g avec n bords géod $\beta_1, \dots, \beta_n$ de longueurs $L_1, \dots, L_n$, on a

$$L_1 = \sum_{\{V_1, V_2\} \text{ géod}} \mathcal{D}(L_1, l(V_1), l(V_2)) + \sum_{i=2}^n \sum_V \mathcal{R}(L_1, L_i, l(V))$$

β_1, V_1, V_2 forment une paire de pantalon

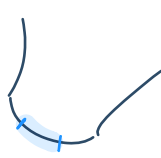



où $\mathcal{D}(x, y, z) = 2 \log \left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{y+z}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}} + e^{\frac{y+z}{2}}} \right)$

$$\mathcal{R}(x, y, z) = x - \log \left(\frac{\cosh \frac{y}{2} + \cosh \frac{x+z}{2}}{\cosh \frac{y}{2} + \cosh \frac{x-z}{2}} \right)$$

Idee : chaque terme à droite $\longleftrightarrow$ une paire de pantalon

un interval de β_1 (et ce terme est sa longueur)



En chaque point $x \in \beta_1$, on trace une géodésique γ_x orthogonale à β_1 .

Plusieurs destins sont possibles pour γ_x ...

(1) γ_x s'intersecte

sinon, avant de s'intersecter

(2) γ_x atteint un autre bord β_i

(3) γ_x revient sur le même bord β_1

Ces trois cas sont génériques.

Mais, il est aussi possible que γ_x fasse des choses plus bizarres...

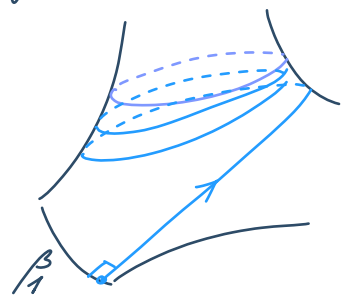
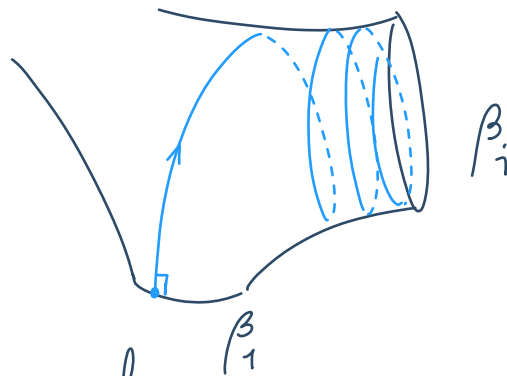
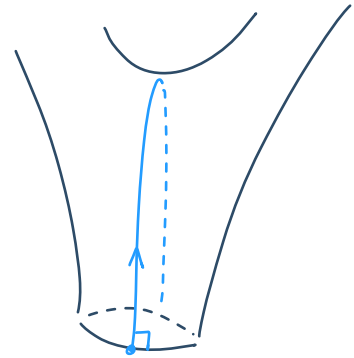
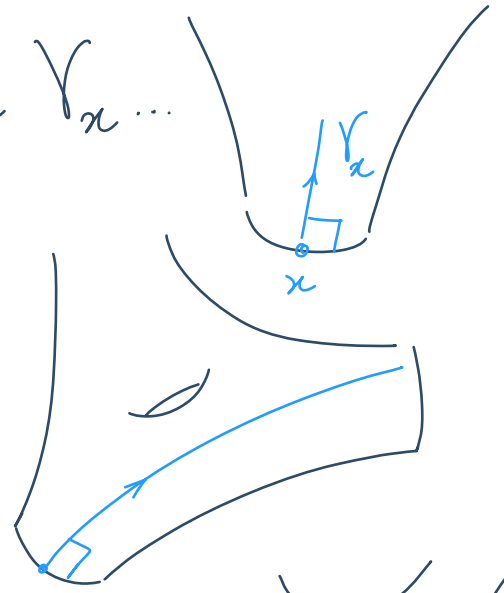
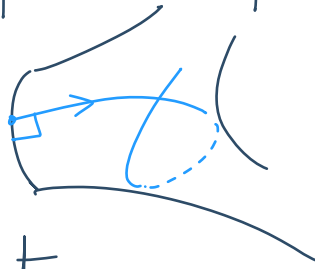
(4) γ_x s'accumule sur une géodésique simple dans la surface X

(5) γ_x s'accumule sur une β_i

(où $i \neq 1$)

(6) des trucs encore plus fous...

(s'accumuler sur une feuille d'une lamination minimale...)



Mais, d'après un théorème de Birman et Series

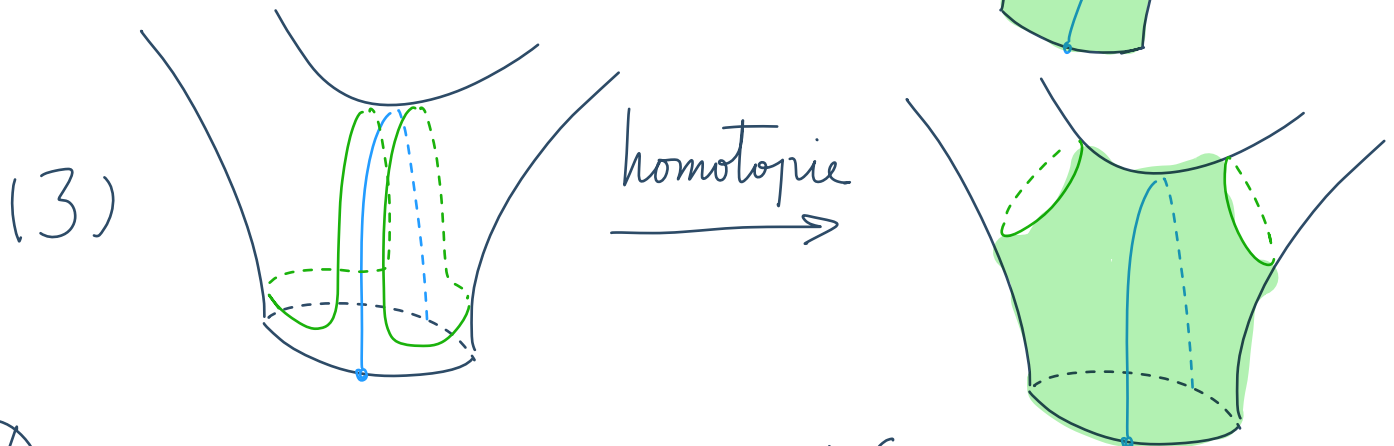
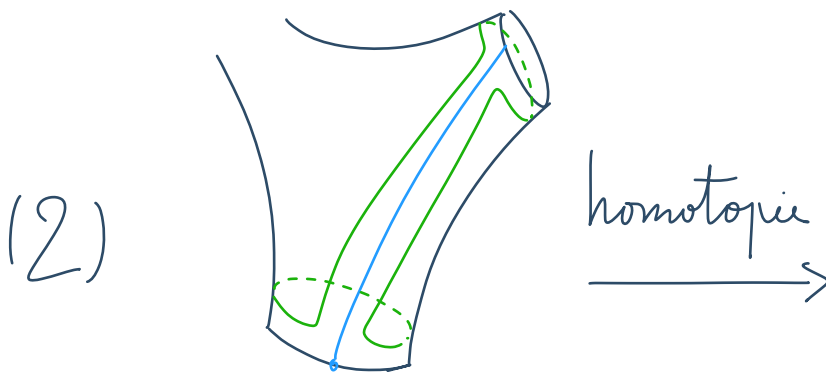
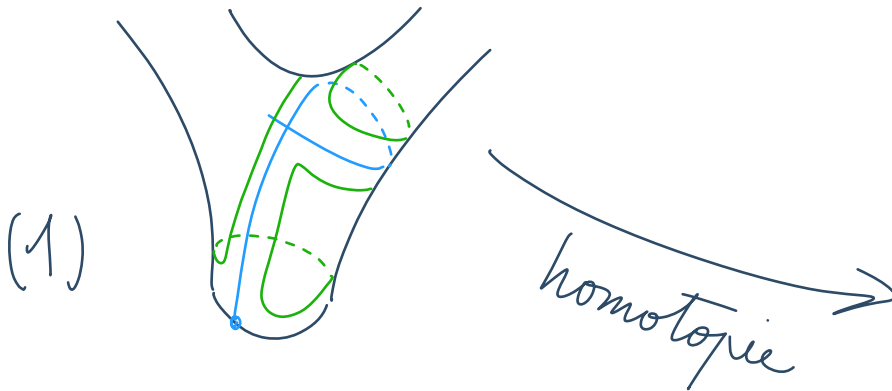
$$\mu_{\text{leb}} \left(\left\{ x \in \beta_1 \mid \gamma_x \text{ fait (4) ou (5) ou (6)} \right\} \right) = 0$$

Dans les cas (1), (2), (3), on peut associer à chaque γ_x

une paire de pantalon

en considérant un voisinage tubulaire de

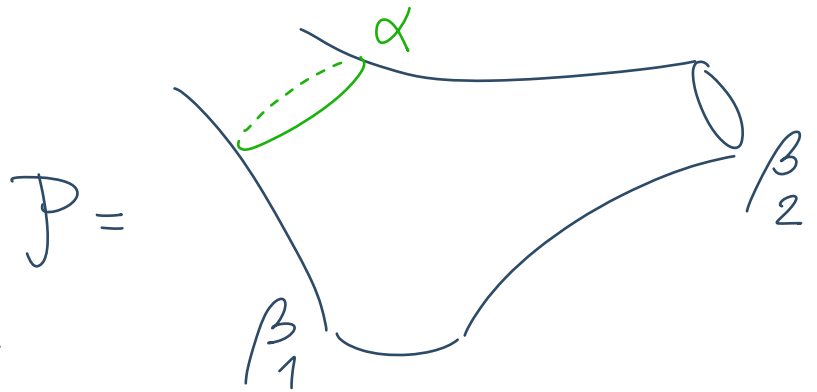
$$\begin{cases} (1) : \gamma_x \cup \beta_1 \\ (2) : \gamma_x \cup \beta_1 \cup \beta_i \\ (3) : \beta_1 \cup \beta_x \end{cases}$$



Donc, génériquement $x \rightsquigarrow \gamma_x \rightsquigarrow$ une paire de pantalon dont un bord est β_1

Réciproquement, étant donné un pantalon avec β_1 comme composante de bord
 quels sont les points $x \in \beta_1$ qui la déterminent ?

Par exemple,
 on considère
 la paire de pantalon

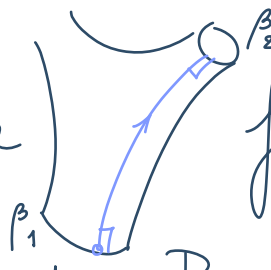


De façon générale, pour toute paire de pantalon,
 entre deux bords, il existe une unique orthogéodésique

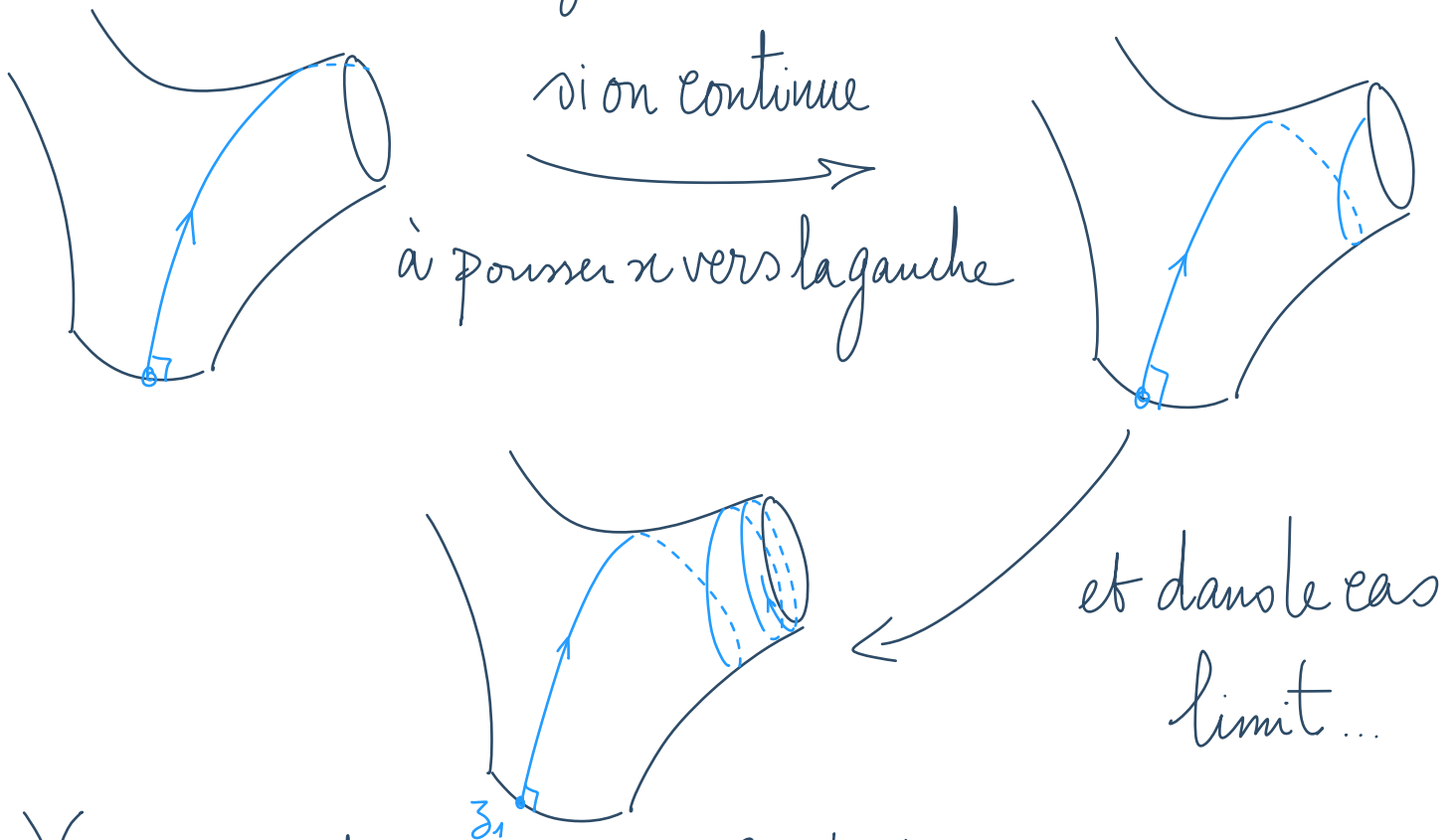
Si on coupe le pantalon
 le long de ces trois orthogéod
 on obtient deux hexagons identiques



Anyway, cette orthogéodésique fait partie
des γ_x qui déterminent P

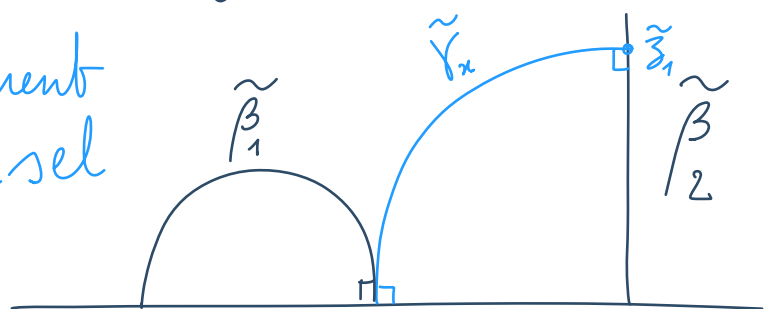


Maintenant, si on pousse $x \in \beta_1$ un peu vers la gauche
 γ_x va rester simple avant de toucher β_2
et γ_x détermine toujours P .



γ_x s'enroule autour de β_2 , tout en restant simple
et ne jamais croiser β_2

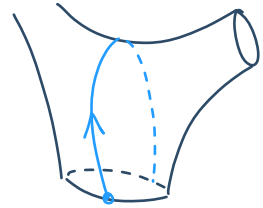
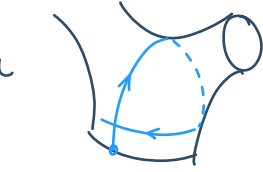
(et dans le revêtement
universel



Maintenant, si on pousse encore α vers la gauche

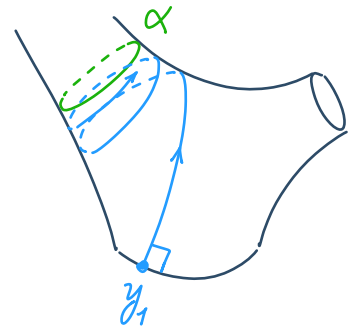
alors γ_α va

- s'intersecter
- toucher β_1



jusqu'au moment

où γ_α s'enroule autour de α



Après, plus à gauche, γ_α va sortir de P ,

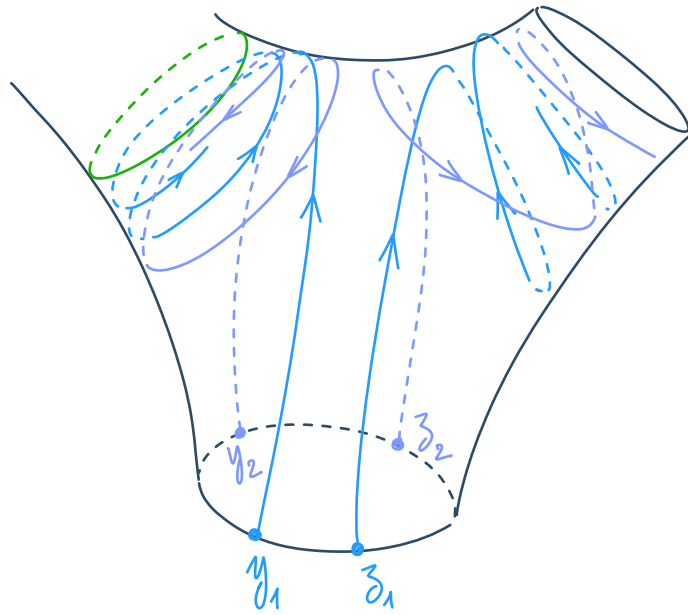
et avoir une autre vie ...

Autrement dit, la paire de pantalon déterminée par γ_α
ne sera plus P

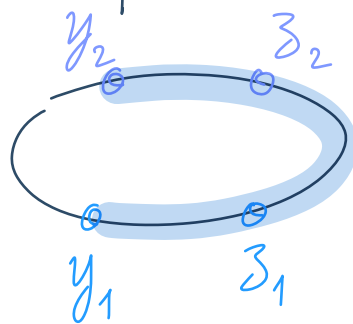
Et la situation est parfaitement symétrique les deux
si on pousse α vers la droite au départ les deux sont identiques

il y a 4 points spéciaux sur β_1 : y_1, z_1, y_2, z_2

tels que γ_{y_1} et γ_{y_2} s'enroulent autour de α mais dans
 γ_{z_1} et γ_{z_2} des directions
_____ β_2 opposées

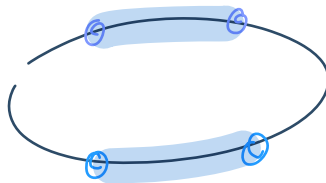


Donc, l'intervalle qui correspond à P est



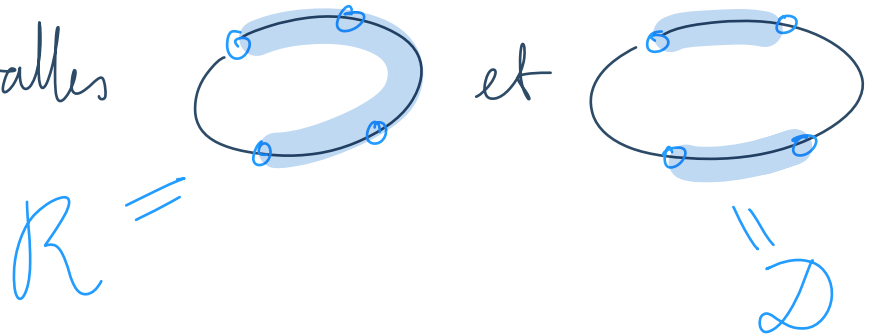
la surface
↓

Exo : si β_2 est une géodesique simple dans X
alors dans ce cas l'intervalle est

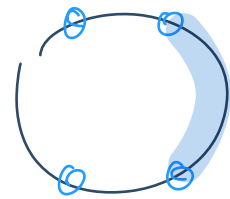


Il ne reste plus qu'à calculer les longueurs

des intervalles

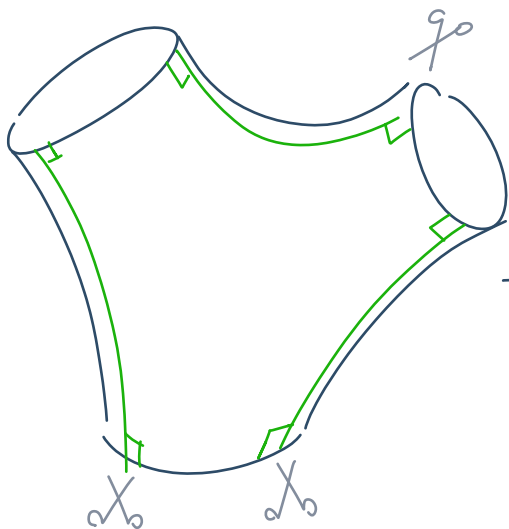
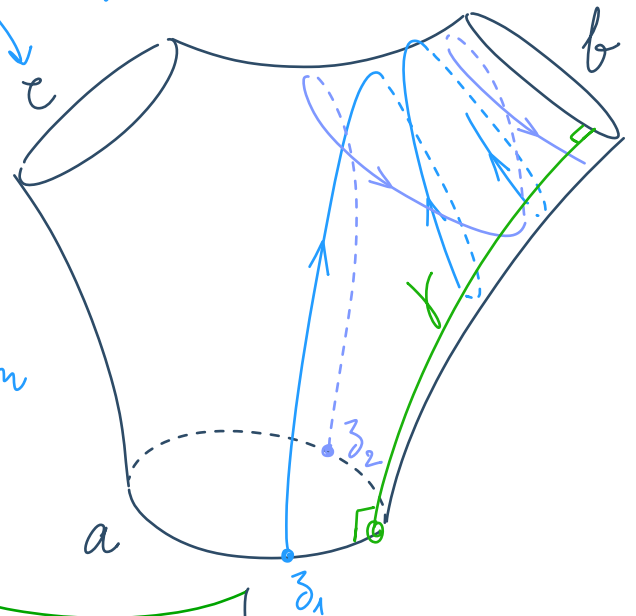


il suffit de connaître

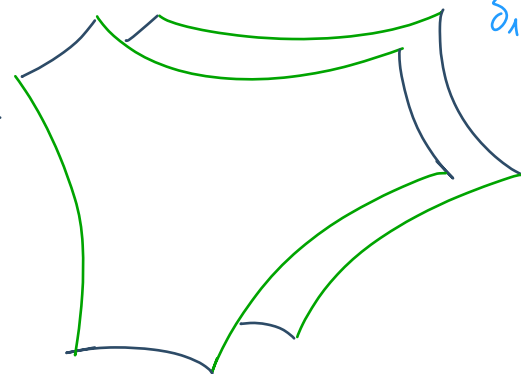


on écrit $l(c) = c$ par abus de notation

On considère l'orthogéod γ
 et on calcule d'abord
 sa longueur γ abus de notation

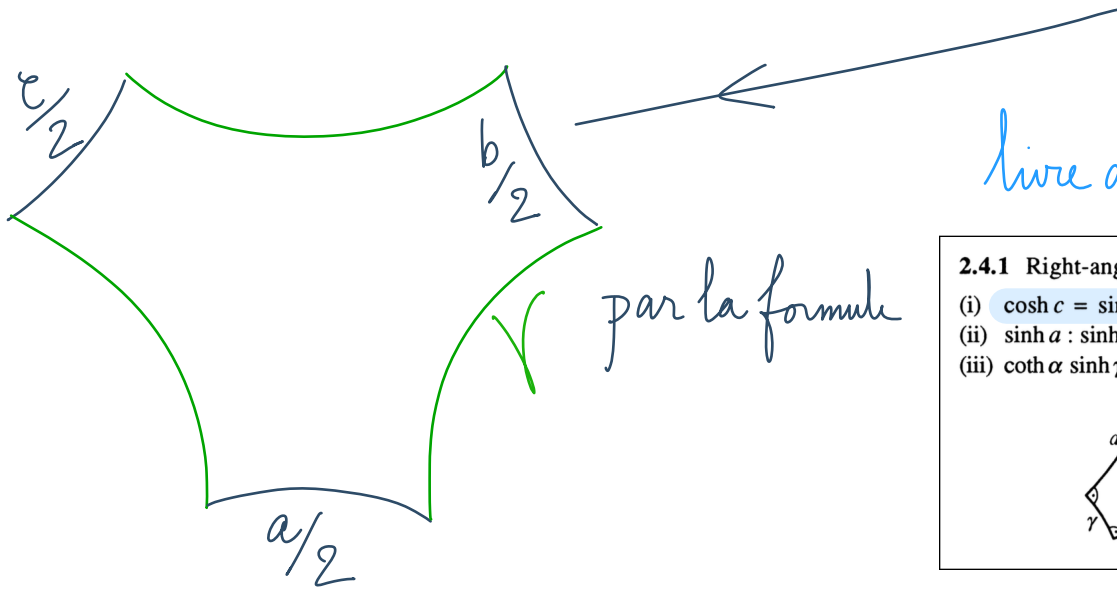


coupe



on obtient deux hexagons id

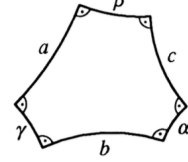
on en prend un



livre de Buser p.454.

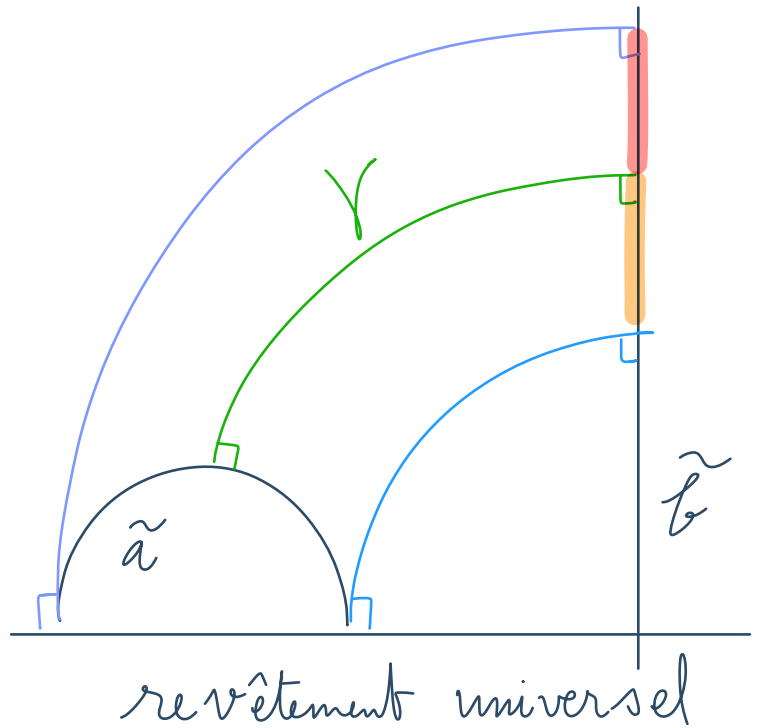
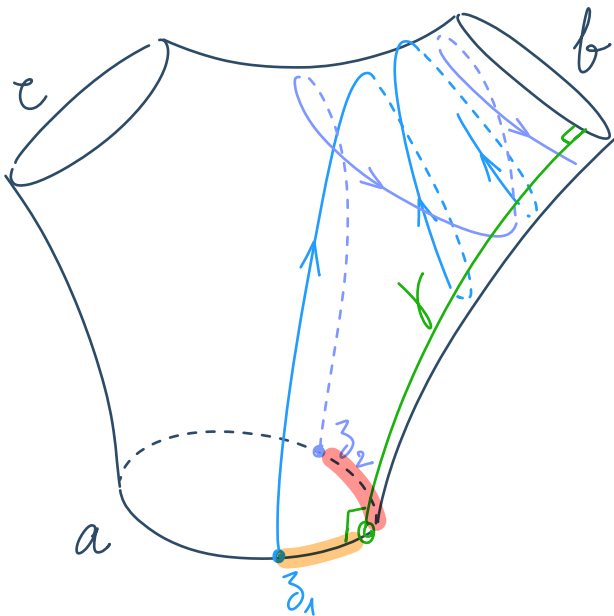
2.4.1 Right-angled hexagons

- (i) $\cosh c = \sinh a \sinh b \cosh \gamma - \cosh a \cosh b$,
- (ii) $\sinh a : \sinh \alpha = \sinh b : \sinh \beta = \sinh c : \sinh \gamma$,
- (iii) $\coth \alpha \sinh \gamma = \cosh \gamma \cosh b - \coth a \sinh b$.

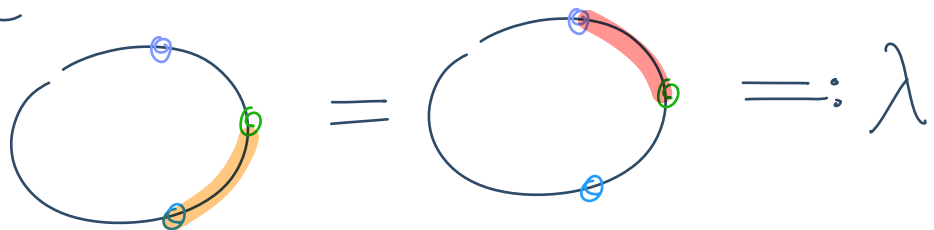


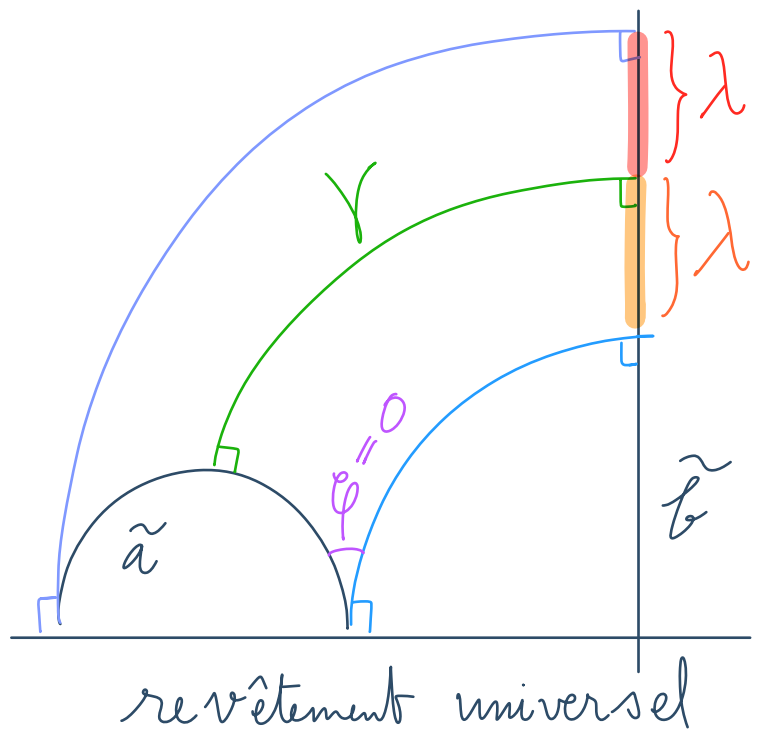
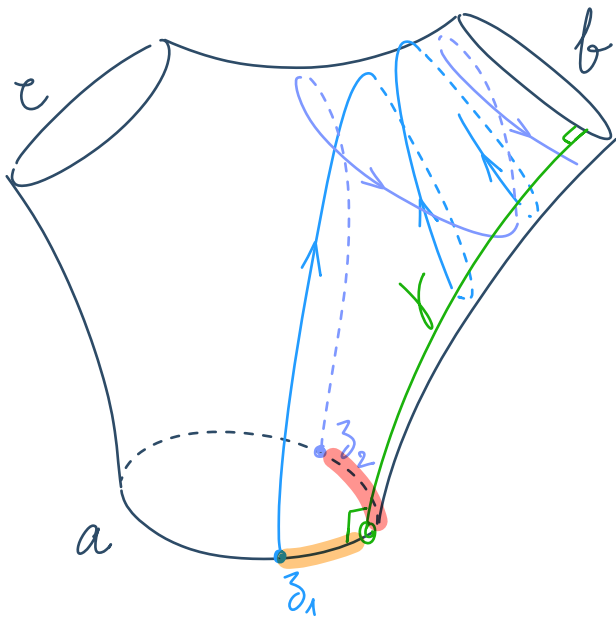
on a

$$\cosh \gamma = \frac{\cosh \frac{c}{2} + \cosh \frac{a}{2} \cdot \cosh \frac{b}{2}}{\sinh \frac{a}{2} \cdot \sinh \frac{b}{2}}$$



Par symetrie

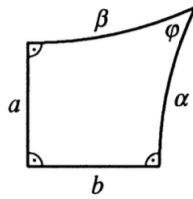




Par la formule

2.3.1 Trirectangles

- (i) $\cos \varphi = \sinh a \sinh b$,
- (ii) $\cos \varphi = \tanh \alpha \tanh \beta$,
- (iii) $\cosh a = \cosh \alpha \sin \varphi$,
- (iv) $\cosh a = \tanh \beta \coth b$,
- (v) $\sinh \alpha = \sinh a \cosh \beta$,
- (vi) $\sinh \alpha = \coth b \cot \varphi$.



$$\lambda = \sinh^{-1} \left(\frac{\cos \varphi}{\sinh \gamma} \right)$$

$$= \sinh^{-1} \left(\frac{1}{\sinh \gamma} \right)$$

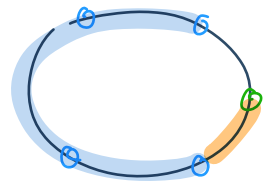
$$= \log \left(\frac{1 + \cosh \gamma}{\sinh \gamma} \right)$$

$$\sinh^{-1}(x) = \log(1 + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } 2\lambda &= 2 \log \left(\frac{1 + \cosh \gamma}{\sinh \gamma} \right) = \log \left(\frac{(1 + \cosh \gamma)^2}{(\sinh \gamma)^2} \right) \\ &= \log \left((1 + \cosh \gamma) \cdot \frac{1 + \cosh \gamma}{(\sinh \gamma)^2} \right) = \log \left(\frac{\cosh(\gamma) + 1}{\cosh(\gamma) - 1} \right) \end{aligned}$$

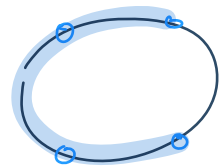
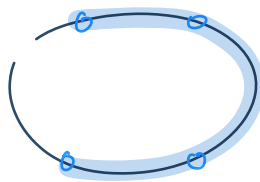
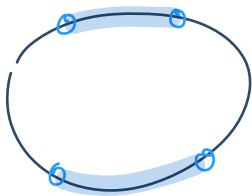
$$= \log \left(\frac{\cosh \frac{c}{2} + \cosh \frac{b}{2} \cosh \frac{a}{2} + \sinh \frac{a}{2} \sinh \frac{b}{2}}{\cosh \frac{c}{2} + \cosh \frac{b}{2} \cosh \frac{a}{2} - \sinh \frac{a}{2} \sinh \frac{b}{2}} \right)$$

$$= \log \left(\frac{\cosh \frac{c}{2} + \cosh \frac{a+b}{2}}{\cosh \frac{c}{2} + \cosh \frac{a-b}{2}} \right)$$



Donc $R(a, c, b) = a - 2\lambda = \dots$

et $D(a, b, c) = R(a, b, c) + R(a, c, b) - a$



$= \dots$