Faisceaux étales sur la grassmannienne affine

Cet exposé s'appuie sur des travaux en commun avec J. Anschütz, I. Gleason, T. Richarz, Z. Wu, J. Yu (AGLR, GL, ALWY)

---

p nombre premier

$\mathbb{Q}_p$ corps des nombres p-adiques

$\mathbb{Z}_p$ anneau d'entiers

$\mathbb{F}_p$ corps résiduel

$\overline{\mathbb{F}}_p$ clôture algébrique

$\breve{\mathbb{Z}}_p = W(\overline{\mathbb{F}}_p) \subset \breve{\mathbb{Q}}_p$ corps de fraction

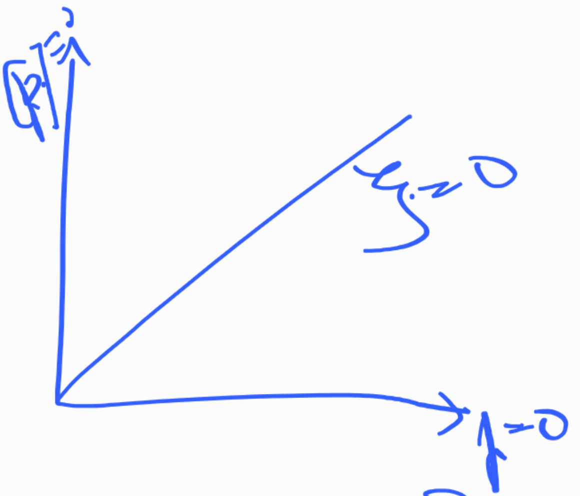
$\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}_p} \supset \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ anneau d'entiers

---

G groupe réductif connexe sur $\mathbb{Q}_p$ supposé déployé (juste pour simplifier)

$\mathcal{G}$ modèle parahorique sur $\mathbb{Z}_p$ de G au sens de Bruhat–Tits : lisse, affine à fibres connexes fixant une alcôve de $\mathcal{B}(G, \mathbb{Q}_p)$

Spa(R,R^+) affinoïde perfectoïde de car. p



$$\mathcal{Y}_{(R,R^+)} = \mathrm{Spa}\, W(R^+) \setminus \{[p^\flat]=0\}$$

$$Y_{(R,R^+)} = \mathcal{Y}_{(R,R^+)} \setminus \{p=0\}$$

$$X_{(R,R^+)} = Y_{(R,R^+)}/\varphi^{\mathbb{Z}}$$ courbe de Fargues–Fontaine

débasculé $D_{(R^\sharp,R^{\sharp+})} = \mathrm{Spa}(R^\sharp, R^{\sharp+}) \hookrightarrow \mathcal{Y}_{(R,R^+)}$ diviseur Cartier

$\mathrm{Sht}_G = \{ \varphi : \mathcal{E} \dashrightarrow \varphi^*\mathcal{E}$ défini au-dessus de $\mathcal{Y}_{(R,R^+)} \setminus D_{(R^\sharp,R^{\sharp+})}$ méromorphe le long de D... $\}$

$\mathcal{E}$: G-torseur$/\mathcal{Y}_{(R,R^+)}$

$\downarrow$

$\mathrm{Spd}\,\mathbb{Z}_p$ = faisceau des débasculés

linéarisation $\mathrm{Gr}_G(R^\sharp,R^{\sharp+}) = \{G$-torseur sur B_{dR}^+ trivialisé sur $B_{dR}\}$; $B_{dR}^+ = \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{Y},D}^{\xi}$

$= LG/L^+G$; $\downarrow$ $\mathrm{Spd}\,\mathbb{Z}_p$; $L^{(+)}G = G(B_{dR}^{(+)})$

But : étudier les faisceaux étales sur Gr_G.

Fibre générique : $\mathrm{Gr}_G \longrightarrow \mathrm{Spd}\,\mathbb{Q}_p$ est un ind-diamant stratifié à la Bruhat

$\mu \in X_*(T)/W_0 = T(B_{dR})/T(B_{dR}^+)$; $j_\mu^0 : \mathrm{Gr}^0_{G,\mu} = L^+G\mu \hookrightarrow \mathrm{Gr}_G$ immersion localement fermée

diamant lisse de dim $\langle 2\rho,\mu\rangle$

L'adhérence $Gr_{\mathcal{G},\mu}$ de $Gr^{\circ}_{\mathcal{G},\mu}$ dans $Gr_{\mathcal{G}}$ est un diamant propre$/\mathcal{D}_F$ opéré par L^+G et stratifié par $Gr^{\circ}_{G,\lambda}$ pour $\lambda \leq \mu$.

Fibre spéciale : $Gr_{\mathcal{I}}/\mathbb{F}_p = Fl_{\mathcal{I}}^{\diamond}$ ← v-faisceau associé

variété de drapeaux de Witt (Zhu)

$Fl_{\mathcal{I}}(R) = \{$ $\mathcal{I}$-torseurs sur $W(R)$ trivialisés sur $W(R)[\frac{1}{p}]$ $\}$

représentable par ind-(schéma parfait) (Bhatt-Scholze)

$j_w^{\circ} : \underbrace{Fl^{\circ}_{\mathcal{I},w}}_{\text{pf. lisse de dim } \ell(w)} = L^+\mathcal{I}\cdot w \hookrightarrow Fl_{\mathcal{I}}$ localement fermé

$\bigcup_{w \in W} j_w \twoheadrightarrow N(\mathbb{Q}_p)/T(\mathbb{Z}_p)$

Adhérence $Fl_{\mathcal{I},w}$ est projective ~~stratifiée~~ par $Fl^{\circ}_{\mathcal{I},v}$, $v \leq w$.

$L/\mathbb{F}_\ell$ ou $\mathbb{Q}_\ell$ algébrique, $\ell \neq p$ premier

X v-faisceau $\rightsquigarrow D(X)$ cat. dérivée des $\mathbb{F}$-mod

+6 opérations $f : X \to S$ rep. en diamants loc. spatiaux dim $< \infty$, compactifiable

$f^*, Rf_*, Rf^!, Rf_!, \otimes^L, R\mathcal{H}om$

Important : $D^{ULA}(X/S) \subset D(X)$ universellement acyclique

$A \in$ ssi $\pi_1^* \mathbb{D}_{X/S}(A) \otimes^L \pi_2^* A \to R\mathcal{H}om(\pi_1^* A, R\pi_2^! A)$

On s'intéresse au cas $X = \mathrm{Hk}_{\mathrm{reg}} = [L^+\mathcal{G}_{\mathrm{reg}} \backslash \mathrm{Gr}_{\mathrm{reg}}]$

t-structures perverses $S = \mathcal{O}_{C_p}$

$${}^pD^{\leq 0}_{\geq}(\mathrm{Hk}_G/C_p) = \{ j_\mu^{*!} A \text{ en deg } \leq_{\geq} -\langle 2\rho, \mu\rangle \}$$

$${}^pD^{\leq 0}_{\geq}(\mathrm{Hk}_{\mathrm{reg}}/\mathbb{F}_p) = \{ j_w^{*!} A \text{ en deg } \leq_{\geq} -\ell(w) \}$$

(sur la fibre gén. : Fargues–Scholze)

Termes constants : fixons $T \subset B \subset G$, B peut varier

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{reg}} \xleftarrow{q} \mathrm{Gr}^+_{\mathrm{reg}} \xrightarrow{p} \mathrm{Gr}^0_{\mathrm{reg}} \longleftarrow \text{points fixes}$$

attracteur par action de $\mathbb{G}_m$

$\mathrm{Gr}^+_{\mathrm{reg}} \cong \mathrm{Gr}_B \sqcup \mathcal{C}$ ← orbites semi-inf $S_w = LU \cdot w$ pour $w \in W\backslash X_*(T)$

$\mathrm{Gr}^0_{\mathrm{reg}} \cong \mathrm{Gr}_T \sqcup \underbrace{W\backslash X_*(T)}_{\text{sur } \mathbb{F}_p}$

$CT_B := Rp_! q^* : D(\mathrm{Gr}_{\mathrm{reg}}) \to D(\mathrm{Gr}^0_{\mathrm{reg}})$

commute avec spécialisation (Braden)

$D(\mathrm{Hk}_{\mathrm{reg}}) \to D(\mathrm{Gr}_{\mathrm{reg}})$

<u>Lemme</u> (FS, AGLR) : $CT_B(A) = 0 \ \forall B \iff A = 0$. En par. $CT_B(A)$ ULA $\forall B \iff A$ ULA

<u>Dém</u> : Résolution de Demazure $\Rightarrow \mathrm{Fl}^0_{\mathrm{reg},w} = L^+B \cdot w$ pour un choix convenable de B. En particulier, w isolé dans $\mathrm{Fl}_{\mathrm{reg},w}$. Puis appliquer CT_B à la définition de Zhu–Zhang. □

Prop (AGLR) : (i) $D^{ULA}(\mathrm{Hk}_{\mathcal{I}}/\overline{\mathbb{F}}_p) \simeq D^{b}_{c}(\mathrm{Hk}^{sch}_{\mathcal{I}}/\overline{\mathbb{F}}_p)$ $[L^+\mathcal{I}\backslash \mathrm{Fl}_{\mathcal{I}}]$

(ii) $R\Psi_{j!}$ préserve ULA.

<u>Dém</u> : Conséquence presque directe du lemme.

P. ex. (ii) avec CT, se réduit au cas d'un tore. □

On en déduit un foncteur $\quad \mathrm{Hk}_{\mathcal{I}}/\overline{\mathbb{F}}_p \overset{i}{\hookrightarrow} \mathrm{Hk}_{\mathcal{I}}/\mathbb{Z}_p \overset{j}{\hookleftarrow} \mathrm{Hk}_G/\mathbb{C}_p$

$$R\Psi = i^* Rj_* : D^{ULA}(\mathrm{Hk}_G/\mathbb{C}_p) \longrightarrow D^{b}_{c}(\mathrm{Hk}^{sch}_{\mathcal{I}}/\overline{\mathbb{F}}_p)$$

$$\cup$$

$$\mathrm{Rep}_{\Lambda}\check{G} \xleftarrow{\simeq} \mathrm{Sat}(\mathrm{Hk}_G) = \text{intersection avec } \mathrm{Perv}(\mathrm{Hk}_G)$$

Satake géo. FS

Choisit inverse $\sqrt{q}$ $\quad CT_B(\mathrm{Sat}(V))_\lambda = V(\lambda)[-\langle 2\rho, \lambda\rangle]$

On note $Z(V) := R\Psi \circ \mathrm{Sat}(V)$

<u>Cor</u> (AGLR) : $CT_B(Z(V))_w = \begin{cases} V(\lambda)[-\langle 2\rho,\lambda\rangle], & \text{si } w=\lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

En particulier, $\mathrm{supp}\, Z(V) = \{ w \in \widetilde{W} \mid w \le \lambda \text{ poids de } V \}$

<u>Preuve</u> : CT commute à $R\Psi$. Il suffit de remplacer B, $w \in \mathrm{supp}\, Z(V)$ maximal aurait une contribution dans CT_B. □

Prop (AGLR) : $Z : \mathrm{Rep}\,\check{G} \longrightarrow D^{b}_{c}(\mathrm{Hk}^{sch}_{\mathcal{I}}/\overline{\mathbb{F}}_p)$ est un foncteur central. $\quad (Z(V) * A \simeq A * Z(V)$ naturels$)$

<u>Dém</u> :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Hk}^{\{1\},\{2\}}_{\mathcal{I}} & \longrightarrow & \mathrm{Hk}^{\{1,2\}}_{\mathcal{I}} & \longleftarrow & \mathrm{Hk}^{\{2\},\{1\}}_{\mathcal{I}} \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & \mathrm{Hk}_G/\mathbb{C}_p \times \mathrm{Hk}_{\mathcal{I}}/\overline{\mathbb{F}}_p & & \end{array}$$

affine Grassmannienne de Beilinson–Drinfeld, compatible avec la spécialisation...

Cycles proches donnent l'isomorphisme

□

Perversité (ALWY) : Il fait géométriser les translations de Bernstein. Ent. Donné BCG, il existe un foncteur t-exact

$$\mathcal{J} : D^b_c(\mathrm{Rep}\,\hat{T}) \longrightarrow {}^p D^b_c(\mathrm{Hk}^{sch}_{\mathrm{Iw}}/\mathbb{F}_p).$$

tq sa restriction à $\lambda \in X_*(T)_+$ est $\nabla_\lambda = R j_{\lambda *} [\langle 2\rho, \lambda \rangle]$

Th (ALWY) : $\mathcal{Z}(V)$ est un faisceau pervers d'après Artin et Hagen affine, muni d'une filtration indexée par $(X_*(T), \leq)$ à gradué $\mathcal{J}(V)$

Dém : Centralité de $\mathcal{Z}(V) \Rightarrow \mathcal{J}(\mathbb{F}_e(\lambda)) * \mathcal{Z}(V)$ à supports compacts dans $X_*(T)_+ \rightsquigarrow$ filtration par cofibres à gradué dans l'im ess. de $\mathcal{J}$. $\mathrm{grad}\,\mathcal{Z}(V) \simeq \mathcal{J}(V)$ s'ensuit du calcul des termes constants ou que $CT_{B^-}(\mathcal{Z}(M))_w = \begin{cases} M(\lambda)[\langle 2\rho, \lambda\rangle] & w = \lambda \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. $\square$

Dans le prochain exposé, je vais expliquer pourquoi $\mathcal{H}^{\langle 2\rho, \mu \rangle} \mathcal{Z}(V_\mu) = L$ libre de rang 1, V_μ irréductible

---

$$\mathcal{Z} \times \mathcal{J} : \mathrm{Rep}(\check{G} \times \check{T}) \longrightarrow D^b_c(\mathrm{Hk}^{sch}_{\mathrm{Iw}}/\mathbb{F}_p)$$

s'étend en un foncteur $D^b_{coh}(\check{\mathcal{U}}_{\check{G}}/\check{G}) \longrightarrow D^b_c(\mathrm{Hk}^{sch}_{\mathrm{Iw}}/\mathbb{F}_p)$ d'Arkhipov–Bezrukavnikov, faisceaux cohérents $/L$