



N° d'ordre:

THÈSE

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE VERSAILLES
SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES

Spécialité: Mathématiques

par

Stefano MORRA

La structure des représentations universelles modulo p pour GL_2

Soutenue le 9 Décembre 2010 devant la Commission d'examen:

M. Christophe BREUIL
M. Laurent CLOZEL
M. Michael HARRIS
Mme. Ariane MÉZARD (Directeur de thèse)
M. Vytautas PASKUNAS
M. Vincent SÉCHERRE

Rapporteurs:

M. Matthew EMERTON
M. Vytautas PASKUNAS

Résumé

Cette thèse se propose d'apporter des contributions originales à l'étude des représentations lisses du groupe linéaire général à coefficients dans une extension finie F de \mathbf{Q}_p .

Dans les chapitres **I** et **II**, on suppose $F = \mathbf{Q}_p$. On démontre l'existence d'une filtration naturelle $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -équivariante sur les représentations supersingulières et sur les séries principales modérément ramifiées, ce qui nous permet de donner une description détaillée de ces objets. On en déduit leur filtration par le $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -socle ainsi que l'espace de leurs invariants selon certains sous-groupes de congruences principaux. On en déduit également dans le chapitre **III** la structure exhaustive des restrictions des représentations supersingulières pour $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ aux sous-groupes provenant des extensions quadratiques de \mathbf{Q}_p .

Dans le chapitre **IV** l'on suppose F non ramifiée sur \mathbf{Q}_p . On décrit de manière précise la structure Iwahori des représentations universelles pour $\mathrm{GL}_2(F)$ à l'aide d'une base naturellement adaptée aux calculs sur les vecteurs de Witt. On donne une interprétation euclidienne de ce résultat qui révèle la nature fractale de ces objets et nous permet d'en déduire leur filtration par le Iwahori-socle. On obtient au passage la structure Iwahori pour les séries principales modérément ramifiées et une injection naturelle d'une certaine induite compacte dans les représentations universelles.

Mots-clefs : Correspondance de Langlands mod p , filtration par le socle, extensions quadratiques, représentations supersingulières, structure Iwahori, extensions non ramifiées.

THE STRUCTURE OF THE UNIVERSAL REPRESENTATIONS MODULO p FOR GL_2

Abstract

This Ph.D. thesis wants to give original contributions to the study of smooth representations of the general linear group with coefficients in a finite extension F of \mathbf{Q}_p .

In chapters **I** and **II** we assume $F = \mathbf{Q}_p$. We show the existence of a natural $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -equivariant filtration on supersingular representations and on tamely ramified principal series as well, letting us give a detailed description of such objects: we deduce their $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -socle filtration and their invariant spaces under some principal congruence subgroup. In chapter **III** we deduce the structure of supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ restricted to the subgroups issued from quadratic extensions of \mathbf{Q}_p .

In chapter **IV** we assume F unramified over \mathbf{Q}_p . We give a precise description of the Iwahori structure for the universal representations of $\mathrm{GL}_2(F)$ thanks to a basis which fits naturally for computations with Witt vectors. We give these results an euclidean interpretation revealing the fractal structure for the universal objects and which let us deduce their Iwahori-socle filtration. As a byproduct, we get the Iwahori structure for tamely ramified principal series as well as a natural injection of certain compact inductions into the universal representation.

Keywords : mod p Langlands correspondence, socle filtration, quadratic extensions, supersingular representations, Iwahori structure, unramified extensions.