Titre de la note

Espaces de Hilbert gaussiens. 1

06/01/2020

I) Introduction

II) Espaces de Hilbert gaussiens

III) Décomposition en chaos, liens avec d'autres représentations

IV) Produits de Wick

Prochain exposé le 20/01/20

I] Introduction

REF :
- S. Janson : Gaussian Hilbert Spaces
- B. Simon : PPhi2 Euclidean QFT
- P. A. Meyer : Quantum probability for probabilists
- A. Guichardet : Symmetric Hilbert spaces and related fields

Pbs qui m'intéresse : 1) $i\hbar\, \partial_t \psi = -\Delta \psi + \sqrt{\hbar}\, V(x,\omega)\, \psi$

$V(x,\omega)$ champ aléatoire gaussien (poissonien ou

autre) invariant par translation
(stationnaire)

90' Erdos Yau Thèse de S. Breteaux.

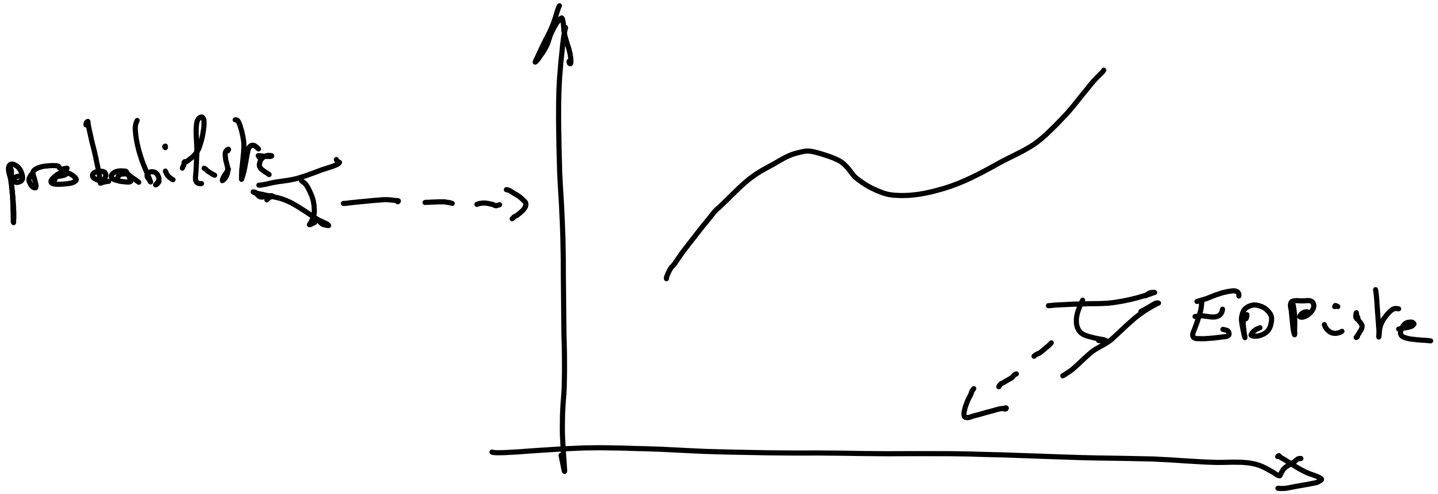
↳ insatisfaisant au niveau conceptuel.

2) Travaux sur le champs moyen et EDPs non linéaire d'évolution (avec Z. Ammari ...) Aspect probabiliste : On doit passer par des flots généralisés.

3) Version quantique des notions de flot généralisé.

Histoire : Wiener, Ito, Segal, Nelson, Glimm-Jaffe, Gross, Kree ...

II] Espaces de Hilbert gaussiens



1) Qu'est-ce que ?

EDP : coordonnée de base $x = (x_1, \dots, x_d)$

Probabiliste : $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^d$) variable aléatoire

$$\mathcal{F} = \{ X^{-1}(E),\ E \text{ borélien de } \mathbb{R} \}$$

Th de Kolmogorov : $(X_i)_{i \in I}$ famille de variables aléatoire

marginale $\mu_{i_1 \dots i_n}$ loi de $(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})$

$$\mu_{i_1 \dots i_{n-1}} = (\Pi_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-1}})_* \mu_{i_1 \dots i_n}$$

Il existe $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de telle sorte

$$\mu_{i_1 \cdots i_n} = (X_{i_1}, \dots, X_{i_n})_* P.$$

<u>Transformée de Fourier</u> :

$$(\mathcal{F}_h u)(\xi) = \int e^{-\frac{i \xi . x}{h}} u(x)\, dx$$

$$(\mathcal{F}_h^{-1} v)(x) = \int e^{\frac{i x . \xi}{h}} v(\xi) \frac{d\xi}{(2\pi h)^d}$$

<u>Théorème de Bochner</u> : Sur un groupe abélien localement compact φ est la transformée de Fourier $\varphi = (\mathcal{F}_1 \mu)$ d'une mesure de proba μ ssi

- $\varphi(0) = 1$
- φ est continue
- φ est de type positif :

$$\sum_{i,j=1}^{N} \overline{\xi_i}\, \xi_j\, \varphi(t_i - t_j) \geq 0$$

$$\left(\varphi(t_i - t_j)\right)_{1 \leq i,j \leq N} \text{ matrice hermitienne } \geq 0$$

Généralisation sur un espace de Hilbert séparable :

Critère de Prokhorov : $(\mu_F)_F$ de dim finie mesure de proba compatible via φ_F transformée de Fourier en dimension finie

$\hookrightarrow$ Pour $\varepsilon > 0$, il existe $R_\varepsilon > 0$ tq

$\forall F$ de dim finie, $\mu_F\left(\left\{|\Pi_F x| \leq R_\varepsilon\right\}\right) \geq 1 - \varepsilon$

$\to$ mesure de proba μ sur E

Intérêt du cas gaussien

Proba : TCL

EDP : $\mathcal{F}_h\left(e^{-\frac{x^2}{2h}}\right) = (2\pi h)^{d/2} e^{-\frac{\xi^2}{2h}}$ $\qquad \frac{d\xi}{(2\pi h)^d}$

+ plein de formule de calcul

A matrice réelle def >0

$$\mathcal{F}_h\left(e^{-\frac{{}^t x A^{-1} x}{2h}}\right) = (\det A)^{\frac{1}{2}} (2\pi h)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{{}^t\xi A \xi}{2h}}$$

$$\mathcal{F}_h\left[\underbrace{\frac{1}{(2\pi h)^{\frac{d}{2}} (\det A)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{{}^t x A^{-1} x}{2h}}}_{\text{mesure de proba } \mu}\right] = \underbrace{e^{-\frac{{}^t\xi A \xi}{2h}}}_{\varphi \text{ pour } h=1}$$

$h=1$

$$E(x_i x_j) = \partial_{\xi_i} \partial_{\xi_j} \varphi(\xi)\Big|_{\xi=0} = A_{ij}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{d/2}(\det A)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{{}^t x A^{-1} x}{2}}$$ gaussienne centrée proba de matrice de covariance A.

Déf : $(X_1, \dots, X_n)$ va gaussiennes jointes centrée si $X_* P$ est une loi gaussienne de covariance $A > 0$ $(A \geq 0)$

Une combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ des (X_i) est une va gaussienne centrée de variance ${}^t\lambda A \lambda$.

Déf : Un espace de Hilbert gaussien réel ($H_{\mathbb{R}}$) est le complété de $\mathrm{Vect}(X_i, i \in I)$ engendré par des v.a centrées réelles ; pour la norme $\|f\|_{L^2}^2 = E(|f|^2)$.

$$H_{\mathbb{R}} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$$

$$\mathcal{F} = \{ X_i^{-1}(E) \ , \ E \text{ borélien de } \mathbb{R} \}$$

$H_{\mathbb{R}}$ sous-espace fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$

$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathbb{R})$ e.v.n pour $1 \leq p \leq +\infty$

quasi-normé pour $0 < p < 1$

$L^0(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathbb{R})$ ens des fonctions $\mathcal{F}$-mesurable

$d_{L^0}(X, Y) = E\left(\min(|X - Y|, 1) \right)$

$H_{\mathbb{R}}$ sous-espace fermé de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathbb{R})$ $0 \leq p < +\infty$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de v.a gaussienne si elle cv dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathbb{R})$

$$X_{n*}P = N(0, \sigma_n) \qquad \sigma_n = E(X_n^2)$$

$$\downarrow$$

$$\sigma = E(X^2)$$

Convergence L^2 implique la cv en lois

$$X \sim N(0, \sigma).$$

Une fois qu'on a $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ et $H_{\mathbb{R}}$ on peut tensoriser avec $\mathbb{C}$.

$$H_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$$

sous-espace fermé de $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C})$ $0 \leq p < +\infty$

Définition : Un espace de Hilbert gaussien $H_{\mathbb{R}}$ est indexé par un espace de Hilbert E, s'il existe une <u>isométrie</u> de E dans $H_{\mathbb{R}}$.

(pas forcément surjective)

Exemples : 1) dim 1 et dim finie.

$H_{\mathbb{R}}$ de dimension finie.

2) $(X_i)_{i \in I}$ famille de va gaussiennes centrées indépendantes.

$$H_{\mathbb{R}} = \underbrace{\overset{\perp}{\bigoplus_{i \in I}} \mathbb{R} X_i}_{\text{somme Hilbertienne.}}$$

3) E espace de Hilbert de dim infinie.

$$\underset{\uparrow}{B' \subset} E \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Hilbert-Schmidt}}}{\subset} B$$

(B ~~Banach~~ ou <u>Hilbert</u>)

La mesure gaussienne de variance $\| \|_E^2$ est portée par B.

E est de mesure nulle.

Variante du théorème de Minlos (cf Simon $P(\phi)_2$)

Si $B(x,y) \in S'(\mathbb{R}^{2d};\mathbb{R})$ est tq

$\forall \varphi \in S(\mathbb{R}^d)$, $\int \varphi(x) B(x,y) \varphi(y)\, dx dy \geq 0$

il existe une mesure de proba gaussienne sur $S'(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$ de variance $B(x,y)$.

X va gaussienne réelle $\quad X \in L^p(\Omega, \mathcal{T}, P) \quad \forall p \in [0,+\infty[$

$p \in \mathbb{N}^*$ $\quad \int x^p \, d\gamma(x) = (F_1\gamma)^{(p)}(0)$

$$(F_1\gamma)(\xi) = e^{-\frac{\sigma\xi^2}{2}}$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left(\frac{\sigma\xi^2}{2}\right)^p$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^k}{k!\,2^k}\,\xi^{2k}$$

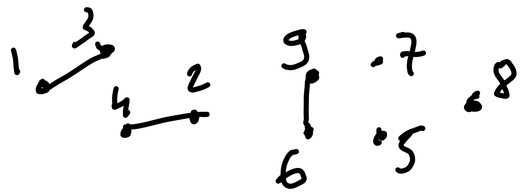
$$\int x^p \, d\gamma(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est impair} \\ \underbrace{\frac{(2k)!}{k!\,2^k}}_{k!!}\left(E(\xi^2)\right)^k & \text{si } p = 2k \end{cases}$$

Définition : Diagramme de Feynman associé à n v.a gaussiennes centrées $X_1, \dots, X_n$: C'est un graphe γ dont les extrémités sont les n sommets $1, \dots, n$ avec au plus une arête par sommet. Le rang du graphe $r(\gamma)$ est le nombre d'arêtes. Si A désigne l'ensemble des points qui ne sont pas extrémité d'une arête on a

$$n = 2r + \#A$$

On dit que le diagramme γ est complet si $A = \emptyset$ (et donc n doit être pair).

Ex : $n = 9$



$A = \{5, 7, 8\}$ $\quad r = 3$

Théorème de Wick 1 : Si $X_1, \dots, X_n$ sont n v.a. gaussiennes centrées

$$E(X_1 \cdots X_n) = \sum_{\gamma \text{ complet}} \left(\prod_{\substack{(i,j) \text{ arête} \\ \text{de } \gamma}} E(X_i X_j) \right)$$

Preuve : Les deux expressions sont symétriques, i.e. invariantes par permutation de $\{1, \dots, n\}$

On utilise alors la formule de polarisation pour une expression symétrique n-linéaire

$$m(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i \in \{\pm 1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n Q(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n)$$

$$Q(x) = m(x, x \dots, x)$$

pour se ramener au cas $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Mais dans ce cas on a déja fait le calcul avec :

$$E(x^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \dfrac{(2k)!}{k!\,2^k}\left(E(x^2)\right)^k & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

Si $n = 2k$, le nb de diagrammes de Feynman complets est le nb de partitions en $k+k$ éléments (C_{2k}^k) fois le nb de permutations des k premiers ($k!$) divisé par 2^k (arêtes non orientées)

On trouve bien $\frac{(2k)!}{k!\,k!} \times k! \times \frac{1}{2^k} = \frac{(2k)!}{k!\,2^k} = k!!$ $\boxed{}$

IV) Décomposition en chaos, espace Fock, Bargmann

H espace de Hilbert gaussien réel.

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R})$ $\quad \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \to L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C})$

$$H_{\mathbb{C}} = H \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

$$\overline{P_n(H)} = \overline{\left\{ p(\xi_1, \dots, \xi_n),\ p \text{ polynôme de } d^\circ \leq n,\ \xi_i \in H \right\}}^{L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C})}$$

$$H^{:n:} = \overline{P_n(H)} \cap \left(P_{n-1}(H)\right)^{\perp}$$

$$H^{:0:}_{\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \qquad H^{:1:}_{\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}} = \left\{ \begin{array}{l} H \\ \text{ou} \\ H \otimes \mathbb{C} \end{array} \right.$$

$$H^{:n:}_{\mathbb{C}} = H^{:n:} \otimes \mathbb{C}.$$

Théorème : $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{:n:}_{\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}}$

somme hilbertienne

$$\left(\begin{array}{l} E(\xi^{2n}) = \dfrac{(2n)!}{n!\, 2^n} E(\xi^2) \\ \|\xi^n\|_{L^2} = \sqrt{\dfrac{(2n)!}{n!\, 2^n}} \, \|\xi\|_{L^2} \end{array} \right) \rightarrow e^{i\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C})$$

Lemme : Si $X \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, P\,; \mathbb{C})$ vérifie $E(X e^{i\xi}) = 0$ pour tout $\xi \in H_{\mathbb{R}}$, alors $X = 0$

Preuve : On se ramène à $X \in L^1(\Omega, \mathcal{T}', P\,; \mathbb{C})$ où $\mathcal{T}'$ est la tribu engendrée par $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ famille v.a gaussiennes centrées indépendantes.

$$0 \overset{hyp}{=} E\left(X e^{i(t_1 \xi_1 + \dots + t_k \xi_k)}\right) = E\left(E(X \mid \mathcal{T}_k)\, e^{i(t_1 \xi_1 + \dots + t_k \xi_k)}\right)$$

$\mathcal{T}_k$ tribu engendrée par $\xi_1, \dots, \xi_k$

$(\forall k \in \mathbb{N}, \quad E(X \mid \mathcal{T}_k) = 0 \quad) \Rightarrow X = 0$ pp $\boxed{\Sigma}$

Orthogonalité à $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H^{:n:}_{\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}}$ $\Longrightarrow$ orthogonalité à tous les $e^{i\xi}$

$\Longrightarrow$ nullité.

Thm : Pour tout $p \in [0, +\infty[$, $\mathcal{P}(H) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(H)$ est dense dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$

$H^{:m:}$ m-ième chaos

Déf : Pour $\xi_1, \dots, \xi_n \in H$

$$:\xi_1 \cdots \xi_n: = \pi_n(\xi_1 \cdots \xi_n)$$

π_n projection $\perp$ sur $H^{:n:}_{\mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C})}$

Plus généralement si $X \in H^{:m:}$ et $Y \in H^{:n:}$

on définit $X \odot Y = \Pi_{m+n}(XY)$

<u>Proposition :</u> L'application $H^{\odot n} \longrightarrow H^{:n:}$

$$\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n \longmapsto :\xi_1 \cdots \xi_n:$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.

$H^{\odot n}$ produit tensoriel (hilbertien) symétrique

$$\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n \overset{\text{algébristes}}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \xi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{\sigma(n)}$$

$$= n! \, S_n(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = n! \, \xi_1 \vee \cdots \vee \xi_n$$

$$S_n(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \xi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{\sigma(n)}$$

S_n projection orthogonale de $H^{\otimes n} \longrightarrow H^{\otimes n}$

$$H^{\odot n} = H^{\vee n} = S_n(H^{\otimes n})$$

<u>Produits scalaires sur $H^{\odot n} = H^{\vee n}$</u>

$$\langle \xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n, \eta_1 \odot \cdots \odot \eta_n \rangle = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^{n} \langle \xi_i, \eta_{\sigma(i)} \rangle$$

$$= n! \langle S_n(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_n), S_n(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_n) \rangle$$

$$= n! \langle \xi_1 \vee \cdots \vee \xi_n, \eta_1 \vee \cdots \vee \eta_n \rangle$$

$$\| \xi^{\odot n} \|_{H^{\odot n}} = \sqrt{n!}\, \| \xi^{\otimes n} \|_{H^{\otimes n}} = \sqrt{n!}\, \| \xi \|^n$$

$$\| \xi^{\otimes n} \|_{H^{\vee n}} = \underline{\| \xi^{\otimes n} \|_{H^{\otimes n}}} = \| \xi \|^n$$

Cas de la dimension 1

Polynômes de Hermite, H_n, $n \in \mathbb{N}$, pour la mesure $\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2h}}}{\sqrt{2\pi h}}\, dx$

normalisés $\| H_n \| = 1$

m̄ chose que les fonctions de Hermite $H_n(x,h) \dfrac{e^{-\frac{x^2}{4h}}}{(2\pi h)^{\frac{1}{4}}}$

BON de $L^2(\mathbb{R}, dx; \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

$$H_n \frac{e^{-\frac{x^2}{4h}}}{(2\pi h)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{(h^{n/2}\, n!)} \left(-h\partial_x + \frac{x}{2}\right)^n \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4h}}}{(2\pi h)^{1/4}}\right]$$

$$a_h = h\partial_x + \frac{x}{2} \qquad a_h^* = -h\partial_x + \frac{x}{2}$$

$$[a_h, a_h^*] = h\,\mathrm{Id}.$$

$$H_n \frac{e^{-\frac{x^2}{2h}}}{(2\pi h)^{\frac{1}{4}}} = \Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{h^n n!}}}\, x^n + \cdots \Big) \frac{e^{-\frac{x^2}{4h}}}{(2\pi h)^{\frac{1}{4}}}$$

$$:x^n: = \sqrt{h^n n!}\; H_n$$

$\underline{h=1}$:

$$\| :x^n: \| = \sqrt{n!} \quad \| H_n \|_{L^2} = \sqrt{n!}$$

$$H_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\xi_1 \qquad \|\xi_1\|_{L^2} = 1 \qquad E(\xi_1^2) = 1$$

$$\| :\xi_1^n: \|^2_{L^2} = n! \left(\|\xi_1\|^2_{L^2}\right)^n = \| \xi_1^{\otimes n} \|^2_{H^{\odot n}}$$

Le calcul avec la variance $2h$ est commode pour utiliser $x = a_h + a_h^*$

Autres normalisations possible :

- $a_h = \dfrac{h\partial_x + x}{\sqrt{2}}$ $\quad a_h^* = \dfrac{-h\partial_x + x}{\sqrt{2}}$ $\quad$ mesure $\dfrac{e^{-\frac{x^2}{h}}dx}{(\pi h)^{\frac{1}{2}}}$ $\quad$ vide $\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2h}}}{(\pi h)^{1/4}}$

$$x = \frac{a_h + a_h^*}{\sqrt{2}}$$

- $a_h = \sqrt{\dfrac{h}{2}}(\partial_x + x)$ $\quad a_h^* = \sqrt{\dfrac{h}{2}}(-\partial_x + x)$ $\quad$ mesure $\dfrac{e^{-x^2}dx}{(\pi)^{\frac{1}{2}}}$ $\quad$ vide $\dfrac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(\pi)^{1/4}}$

$$x = a_h + a_h^* / \sqrt{2h}$$

- **Espace de Fock bosonique**

$$\mathcal{F}_b(H_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{\mathbb{C}}^{\vee n} \qquad H_{\mathbb{C}}^{\vee n} = H_{\mathbb{C}}^{\odot n}$$

$$S = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_n \qquad \mathcal{F}_b(H_{\mathbb{C}}) = S\left[\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_{\mathbb{C}}^{\otimes n}\right]$$

(complétés Hilbertiens).

$$\left\|\bigoplus_{n=0}^{\infty} u_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2_{H^{\vee n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|^2_{H^{\otimes n}}$$

Pour $f \in H_{\mathbb{C}}$ on définit $\tilde{a}(f) : H^{\otimes n} \longrightarrow H^{\otimes n-1}$

$$\tilde{a}(f)(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \langle f, f_1\rangle f_2 \otimes \cdots \otimes f_n$$

$$\langle \;,\; \rangle$$

antilin lin.

$$\tilde{a}(f) : H^{\vee n} \longrightarrow H^{\vee n-1}$$

$$a(f)\big|_{H^{\vee n}} = \sqrt{n}\;\tilde{a}(f)\big|_{H^{\vee n}}$$

$$= S_{n-1}\left(\sqrt{n}\,\tilde{a}(f)\right) S_n$$

$$\tilde{a}^*(f) : H^{\otimes n} \longrightarrow H^{\otimes n+1}$$

$$f_1 \otimes \cdots \otimes f_n \longrightarrow f \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n$$

$$a^*(f) = \sqrt{n+1}\;\; S_{n+1}\,\tilde{a}(f)^*\, S_n$$

$$a(f)(f_1 \vee \cdots \vee f_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle f, f_i \rangle f_1 \vee \cdots \vee f_{i-1} \vee f_{i+1} \vee \cdots \vee f_n \right)$$

$$a^*(f)(f_1 \vee \cdots \vee f_n) = \sqrt{n+1} \, (f \vee f_1 \cdots \vee f_n)$$

$$\left[a(g), a^*(f) \right] = \langle g, f \rangle \, \mathrm{Id}$$

Version semi-classique $\quad a_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}\, a \qquad a_\varepsilon^* = \sqrt{\varepsilon}\, a^*$

$$\left[a_\varepsilon(g), a_\varepsilon^*(f) \right] = \varepsilon \langle g, f \rangle \, \mathrm{Id}.$$

Si $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $H_\mathbb{C}$

alors $\left(e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{h^{|\alpha|}\alpha!}} \left(a^*(e)^\alpha\right) |\Omega\rangle \right)_{\alpha\in\mathbb{N}^d,\, d\in\mathbb{N}}$ est une BON de $\mathcal{F}_b(H_\mathbb{C})$.

$$e_{\alpha_1,\dots,\alpha_d} = \frac{1}{\sqrt{h^{\alpha_1}\alpha_1!}} a^*(e_1)^{\alpha_1} \cdots \frac{1}{\sqrt{h^{\alpha_d}\alpha_d!}} a^*(e_d)^{\alpha_d} |\Omega\rangle$$

$$\Gamma_+(H) = \mathrm{Fock}_b(H)$$

$$\Gamma_+(H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2) = \Gamma_+(H_1) \otimes \Gamma_+(H_2)$$

C contraction de $H_{\mathbb{C}}$ $\qquad \Gamma_+(C)\Big|_{H^{\otimes n}} = C \otimes \cdots \otimes C$

$$H^{\vee n} \longrightarrow H^{\vee n}$$

Si A est auto-adjoint.

$$d\Gamma_{+,h}(A) = ih \frac{d}{dt}\, \Gamma_+\left(e^{-itA}\right)\Big|_{t=0}$$

$$d\Gamma_{+,h}(A)\Big|_{H^{\vee n}} = h\,\Big[A \otimes Id \cdots \otimes Id + Id \otimes A \otimes \cdots \otimes Id + Id \otimes \cdots \otimes A\Big]$$

$$d\Gamma_{+,h}(Id)\big|_{H^{\vee n}} = h\,n\,\times = h(N_{h=1})\big|_{H^{\vee n}}$$

$$= N_h\Big|_{H^{\vee n}}$$

Point de vue Bargmann : en dim d

$$\mathcal{F}_h = \left\{ u \text{ entière sur } \mathbb{C}^d, \int |u(z)|^2 \frac{e^{-\frac{|z|^2}{h}}}{(\pi h)^d} L(dz) < +\infty \right\}$$

$L(dz)$ mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^d \sim \mathbb{R}^{2d}$

Si $u \in \mathcal{F}_h$ alors pour $t > 0$ $u_t = u(e^{-t}\,\cdot) \in \mathcal{F}_h$

et $z^\alpha u_t \in \mathcal{F}_h$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$\{u$ entière, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$, $z^\alpha u \in \mathcal{F}_h\}$ est dense dans $\mathcal{F}_h$.

BON de $\mathcal{F}_h$. $\left(c_\alpha z^\alpha\right)_{\alpha\in\mathbb{N}^d}$

$$\langle z^\alpha, z^\beta\rangle = \int_{\mathbb{C}^d} \bar{z}^\alpha z^\beta \frac{e^{-\frac{|z|^2}{h}}}{(\pi h)^{d/2}} L(dz)$$

$$= \int_{\mathbb{C}^d} \bar{z}^\alpha \left(h\partial_{\bar z}\right)^\beta \left[\frac{e^{-\frac{|z|^2}{h}}}{(\pi h)^{d/2}}\right] L(dz)$$

$$= \int_{\mathbb{C}^d} \left[\overline{\left(+h\partial_{\bar z}\right)^\beta \bar{z}^\alpha}\right] e^{-\frac{|z|^2}{h}} / (\pi h)^{d/2} L(dz)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha\neq\beta \\ h^{|\alpha|}\alpha! & \text{si } \alpha=\beta \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{h^{|\alpha|}\alpha!}} z^\alpha\right)_{\alpha\in\mathbb{N}^d} \quad \text{BON}$$

Adjoint de $z_i x$

$$\int \overline{u}(z)\, z_i v(z)\, \frac{e^{-\frac{|z|^2}{h}}}{(\pi h)^{d/2}} L(dz) = \int \overline{u}(z) \left(-h \partial_{\overline{z}_i}\right) \left[v(z) \frac{e^{-\frac{|z|^2}{h}}}{(\pi h)^{d/2}} \right] L(dz)$$

$$= \langle h \partial_{z_i} u, v \rangle$$

$a^*(e_i) = z_i x \qquad a(e_i) = h \partial_{z_i}$

$$[h \partial_{z_j}, z_k x] = h \delta_{jk} \mathrm{Id}$$

$u \in \mathcal{F}_h \qquad u(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \frac{u^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} z^\alpha$

$$= \sum_{k=0}^{N} \underbrace{\frac{1}{k!} D^k u_0 \cdot \left(z^{\otimes k} - z_0\right)}$$

Rq : Si on veut écrire le dév en série avec des pdts de dualité sesquilinéaire et garder un isom $\mathbb{C}$-lin avec l'espace de Fock, il vaut mieux prendre u antiholomorphe (i.e. holom en $\bar{z}$).

Lien avec la décomposition en chaos

$(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ v.a. gaussienne centrées réelles indépendantes de variance 1.

$\mathcal{F}_K$ tribu engendrée par $X_1, X_2, \dots, X_K$

$\mathcal{F}_{K^\perp}$ ——————— $X_{K+1}, \dots$

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C}) = L^2(\Omega, \mathcal{F}_K, P; \mathbb{C}) \otimes L^2(\Omega, \mathcal{F}_{K^\perp}, P; \mathbb{C})$$

$$L^2(\Omega, \mathcal{F}_K, P; \mathbb{C}) = \bigotimes_{i=1}^{K} L^2(\Omega, \mathcal{F}_{X_i}, P; \mathbb{C})$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n!}} X_i^{:n:}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$ Base hilb de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_{X_i}, P; \mathbb{C})$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha!}} X^{:\alpha:}\right)_{\alpha \in \mathbb{N}^{\{1,\dots,k\}}}$$ Base hilb de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_k, P; \mathbb{C})$

image de $\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha!}} a^*(e)^\alpha |\Omega\rangle\right)$ $(h = 1)$

$$\| :\xi_1 \cdots \xi_n: \|_{L^2} = \| \xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n \|_{H^{\odot n}} = \sqrt{n!} \, \| \xi_1 \vee \cdots \vee \xi_n \|_{H^{\vee n}}$$

$X \odot Y$ pdt généralisé peut se voir

$X \in H^{:m:}$, $Y \in H^{:n:}$ comme un produit tensoriel symétrique

$$\|X \odot Y\|_{H^{:m+n:}} = \|X \odot Y\|_{H^{\odot m+n}} \leq \left(\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\right)^{\frac{1}{2}} \|X\|_{H^{:m:}} \|Y\|_{H^{:n:}}$$

$$\|X \odot Y\|_{H^{\vee(m+n)}} \leq \|X\|_{H^{\vee m}} \|Y\|_{H^{\vee n}}$$

égalité pour $X = \xi^{\otimes m}$ $Y = \xi^{\otimes n}$

$$\|X\|_{H^{\odot m}} = \sqrt{n!}\, \|X\|_{H^{\vee n}}$$

III] Fonctions entières de Wick et autres formules de Wick

Si f est une série entière $f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ tq

tq la série $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!}\, a_n \xi^n$ a un rayon de cv infini

on peut définir $:f(\xi): = \sum_{n=0}^{\infty} a_n :\xi^n:$

comme série cv dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C})$ puisque

$$\| a_n :\xi^n: \|^2 = n!\, |a_n|^2 \|\xi\|^{2n}$$

$$\| a_n :\xi^n: \| = \underbrace{\sqrt{n!}\, |a_n|\, R^n}_{\text{série AC}} \times \underbrace{\left(\frac{E(\xi^2)^{\frac{1}{2}}}{R} \right)^n}_{\text{série AC pour } R^2 > E(\xi^2)}$$

$$\frac{d}{dt} :e^{t\xi}: = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} :\xi^n: = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} :\xi^{n+1}:$$

Si on revient à la dimension 1 : $:\xi^{n+1}: = a^*(\xi)^{n+1}|\Omega\rangle$

$$a^*(\xi) = -\xi' + \xi/2 = -a(\xi) + \xi x$$

$$:\xi^{n+1}: = \xi :\xi^n: - a(\xi)\, a^*(\xi)^n |\Omega\rangle$$

$$= \xi :\xi^n: - n\|\xi\|^2_{L^2} :\xi^{n-1}:$$

$$\frac{d}{dt} :e^{t\xi}: = \xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} :\xi^n: - t\, E(\xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} :\xi^n:$$

$$= \left[\xi - t\, E(\xi^2)\right] :e^{t\xi}:$$

On obtient $\boxed{:e^{\xi}: = e^{\xi - E(\xi^2)/2} \quad \text{pour tout } \xi \in H_{\mathbb{C}}}$

Rq : $E(:e^{\xi}:) = (:e^{\xi}:)|_{H^{:0:}} = 1$

Conséquences :

- $:e^{\xi+\eta}: = e^{-E(\xi\eta)} :e^{\xi}::e^{\eta}:$
- $E(:e^{\xi}::e^{\eta}:) = e^{E(\xi\eta)}$
- $E(\overline{:e^{\xi}:} :e^{\eta}:) = e^{E(\bar{\xi}\eta)}$
- $\| :e^{\xi}: \|_{L^p} = e^{\frac{(p-1)}{2} E(\xi^2)}$, $0 < p < +\infty$, ξ réelle

$$\left\| :e^{\xi + i\eta}: \right\|_{L^p} = e^{\frac{p-1}{2} E(\xi^2) + E(\eta^2)} \quad \xi, \eta \text{ réelles}$$

Comme on retrouve $:\xi^n:$ par dérivation de $:e^{t\xi}:$, l'ensemble $(:e^{\xi}:)_{\xi \in H_\delta}$ est total dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathbb{C})$

Autres conséquences Pour γ diagramme de Feynman associé à $\xi_1, \dots, \xi_n$ on pose

$$v(\gamma) = \prod_{(\xi_i \xi_j) \text{ arête de } \gamma} E(\xi_i \xi_j) \left(\prod_{i \in A} \xi_i \right)$$

Proposition : $\xi_1, \dots, \xi_n$ va gaussiennes centrée

$$:\xi_1 \cdots \xi_n: = \sum_{\gamma \text{ diagramme de Feynman}} (-1)^{r(\gamma)} v(\gamma)$$

Formule indépendante de l'espace de Hilbert gaussien contenant $\xi_1, \dots, \xi_n$

Preuve : Encore par symétrie des 2 termes on peut supposer $\xi_1 = \dots = \xi_n = t\xi$.

$:\xi^n:$ est la dérivée n-ième $/t$ en $t=0$ de

$$:e^{t\xi}: = e^{+t\xi - \frac{t^2}{2}E(\xi^2)} = \left(\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{t^n \xi^n}{n!}\right) \times \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-t^2}{2}E(\xi^2)\right)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \sum_{0\leq k\leq n/2} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!\,k!\,2^k} E(\xi^2)^k \xi^{n-2k}$$

$$\frac{n!}{(n-2k)!} \times \frac{1}{k!\,2^k} = \underbrace{\frac{n!}{(n-2k)!\,(2k)!}}_{\text{nb de partitions en }(2k,\,n-2k)\text{ pts}} \cdot \underbrace{\frac{(2k)!}{k!\,2^k}}_{\text{nb de diagrammes complet de }(2k)\text{ pts}}$$

= nb de diagramme de Feynman de rang k $\blacksquare$

Théorème : $Y_i =: \xi_{i1} \cdots \xi_{i l_i}$

$(\xi_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq l_i \\ 1 \leq i \leq k}}$ va gaussienne centrée

$$E(Y_1 \cdots Y_k) = \sum_{\gamma} v(\gamma)$$

γ : diagramme de Feynman complet indexé par (ξ_{ij}) tq aucune arête $(\xi_{i_1 j_1}, \xi_{i_2 j_2})$ ne vérifie $i_1 = i_2$

$$Y_1 \cdots Y_k = \sum_{\gamma} :v(\gamma):$$

diagramme de Feynman indexé par (ξ_{ij})

tq aucune arête $(\xi_{i_1 j_1}, \xi_{i_2 j_2})$ ne vérifie $i_1 = i_2$

$$:v(\gamma): = \prod_{(\xi_{i_1 j_1}, \xi_{i_2 j_2}) \text{ arête}} E(\xi_{i_1 j_1}\xi_{i_2 j_2}) \times :\prod_{\xi_{ij} \subset A} \xi_{ij}:$$