Exercice 8.12

1. Par hypothèse, il existe (au moins) un élément non nul parmi les a_i, $1 \leq i \leq n$. Pour simplifier la rédaction de la solution, on va supposer que $a_1 \neq 0$.

L'idée intuitive est la suivante : Comme

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \;/\; a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \right\},$$

le choix arbitraire de valeurs pour $x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ oblige à prendre pour x_1 la valeur :

$$x_1 = -\frac{1}{a_1}\left(a_2 x_2 + \dots + a_n x_n\right).$$

(D'où la nécessité que $a_1 \neq 0$ ou qu'au moins un des a_i soit non nul.) En ce sens, H est déterminé par $n-1$ choix arbitraires.

C'est cette idée qu'on va exploiter pour montrer que c'est un hyperplan.

Si l'on choisit $x_2 = 1$, $x_3 = \dots = x_n = 0$, on obtient $x_1 = -\frac{1}{a_1}$. Cela conduit au vecteur $\left(-\frac{1}{a_1}, 1, 0, \dots\right)$. On peut recommencer avec $x_3 = 1$ et $x_2 = x_4 = \dots = x_n = 0$, qui conduit à $\left(-\frac{1}{a_1}, 0, 1, 0, \dots, 0\right)$. Etc...

Inspiré par ce qui précède, on ĉ les vecteurs v_i, $2 \leq i \leq n$, suivants :

$$v_2 = \left(-\frac{a_2}{a_1}, 1, 0, \dots, 0\right) = -\frac{a_2}{a_1} e_1 + e_2$$

$$v_3 = \left(-\frac{a_3}{a_1}, 0, 1, 0, \dots, 0\right) = -\frac{a_3}{a_1} e_1 + e_3$$

$$\vdots$$

$$v_n = \left(-\frac{a_n}{a_1}, 0, \dots, 0, 1\right) = -\frac{a_n}{a_1} e_1 + e_n .$$

Autrement dit :

pour $2 \leq i \leq n$, $v_i = -\frac{a_i}{a_1} e_1 + e_i$

(Bien sûr, les e_i, $1 \leq i \leq n$, sont les vecteurs de la base canonique.)

Nous allons montrer que la famille $\{v_2, \dots, v_n\}$ est une base de H.

.) Il est clair que $v_i \in H$ pour $2 \leq i \leq n$.

..) Montrons que $\{v_2, \dots, v_n\}$ est libre.

Supposons que $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ soit des scalaires tels que $\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$. On a donc :

$$0 = \lambda_2 \left(-\frac{a_2}{a_1} e_1 + e_2\right) + \lambda_3 \left(-\frac{a_3}{a_1} e_1 + e_3\right) + \dots + \lambda_n \left(-\frac{a_n}{a_1} e_1 + e_n\right)$$

$$= \left(-\sum_{i=2}^{n} \lambda_i \frac{a_i}{a_1}\right) e_1 + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i e_i$$

Comme la base canonique est une famille libre, cela implique que $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. On a donc bien que $\{v_2, \ldots, v_n\}$ est libre.

Il s'ensuit que :

$$\mathrm{Vect}\{v_2, \ldots, v_n\} \subseteq H \subseteq \mathbb{K}^n$$

avec $\dim\left(\mathrm{Vect}\{v_2, \ldots, v_n\}\right) = n-1$ et $\dim\left(\mathbb{K}^n\right) = n$.

Mais alors, la Proposition VI.2.8 assure que

$$n-1 \leq \dim(H) \leq n$$

et que $\dim(H) \neq n$ (car sinon on aurait $H = \mathbb{K}^n$, ce qui est faux puisque le vecteur [illegible] donc la coord. numéro i est $\frac{1}{a_i}$ si $a_i \neq 0$ et 0 si $a_i = 0$ n'est pas dans H). On déduit de cela que $\dim(H) = n-1$, c'est à dire que H est un hyperplan et (à nouveau par la Prop. VI.2.8) que

$$H = \mathrm{Vect}\{v_2, \ldots, v_n\}.$$

2. Soit H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$. Cela signifie qu'il existe une base de H composée de $n-1$ vecteurs. Soit $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$ une telle base. Alors, en particulier, $\{f_1, \dots, f_{n-1}\}$ est une famille libre. Donc, d'après le théorème de la base incomplète, il existe un vecteur f_n de $\mathbb{K}^n$ tq $\{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\}$ soit une base de $\mathbb{K}^n$.

Ainsi, on a la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} H & \subseteq & \mathbb{K}^n \\ \| & & \| \\ \mathrm{Vect}\{f_1, \dots, f_{n-1}\} & \subseteq & \mathrm{Vect}\{f_1, \dots, f_n\}. \end{array}$$

Dans une telle situation, on dit que $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ est une <u>base adaptée</u> à H. Concrètement, cela entraîne que H et $\mathbb{K}f_n$ sont supplémentaires :

$$\mathbb{K}^n = H \oplus \mathbb{K}f_n. \qquad (*)$$

<u>Ainsi : un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est dans H si, et seulement si, sa composante relative à $\mathbb{K}f_n$ de $(*)$ est nulle.</u>

On peut exploiter ce qui précède grâce à des formules de changement de base. C'est ce que l'on fait maintenant.

Ecrivons les vecteurs de la base canonique dans la base $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} e_1 &= a_{11} f_1 + \cdots + a_{1n} f_n \\ &\vdots \\ e_n &= a_{n1} f_1 + \cdots + a_{nn} f_n \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) &= x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \\ &= x_1 \left(a_{11} f_1 + \cdots + a_{1n} f_n \right) + \cdots + x_n \left(a_{n1} f_1 + \cdots + a_{nn} f_n \right) \\ &= \left(x_1 a_{11} + \cdots + x_n a_{n1} \right) f_1 + \cdots + \left(x_1 a_{1n} + \cdots + x_n a_{nn} \right) f_n \end{aligned}$$

Donc (cf. page précédente) :

$$(x_1, \ldots, x_n) \in H \iff x_1 a_{1n} + \cdots + x_n a_{nn} = 0.$$
$$\iff a_{1n} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n = 0$$

Ou encore :

$$H = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \;/\; a_{1n} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n = 0 \right\}$$

Note: Les scalaires $a_{1n}, \ldots, a_{nn}$ sont donc ceux de la dernière colonne de la matrice qui exprime en colonne les coord. des vect. de la base canonique en fonction de la base $\mathcal{F}$.

Attention : dans ce qui précède, il est clair que les scalaires $a_{1n}, \dots, a_{nn}$ dépendent du choix fait pour les vecteurs $f_1, \dots, f_n$. C'est pourquoi il n'est pas pertinent d'appeler $a_{1n}x_1 + \dots + a_{nn}x_n$ l'équation de H dans la base canonique, mais "une" équation de H dans la base canonique.

Ce problème de non-unicité sera clarifié à la question suivante.

3. Par hypothèse, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0 \iff b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0.$$

[illegible]

Supposons, pour simplifier, que $a_1 \neq 0$.

On constate facilement que :

$$\left(\frac{a_2}{a_1}, -1, 0, \dots, 0\right)$$

$$\left(\frac{a_3}{a_1}, 0, -1, 0, \dots, 0\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{a_n}{a_1}, 0, \dots, 0, -1\right)$$

vérifient tous l'éq. $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$.
Donc, ils doivent vérifier aussi l'éq.
$b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n = 0$. On en déduit que :

$b_1 \frac{a_2}{a_1} = b_2$ càd $b_2 = \frac{b_1}{a_1} a_2$

$b_1 \frac{a_3}{a_1} = b_3$ càd $b_3 = \frac{b_1}{a_1} a_3$

$\vdots$ $\vdots$

$b_1 \frac{a_n}{a_1} = b_n$ càd $b_n = \frac{b_1}{a_1} a_n$.

Comme, bien sûr, $b_1 = \frac{b_1}{a_1} a_1$, il suffit de prendre $\lambda = \frac{b_1}{a_1}$ pour obtenir le résultat voulu.

Si $a_1 = 0$, on peut refaire le même raisonnement avec un "autre" a_i non nul, puisqu'il y en a forcément un.

Complément : ce que l'on vient de découvrir révèle que des équations différentes pour un même hyperplan sont nécessairement proportionnelles, ce qui clarifie la non-unicité remarquée à la question 2.