Exercice VI.8.20

Préliminaire :

- Par déf. $D = \text{Vect}\{(-1,1,2)\}$. Donc la famille $\{(-1,1,2)\}$ engendre D. De plus, cette famille est évidemment libre car $(-1,1,2) \neq (0,0,0)$. Ainsi $\{(-1,1,2)\}$ est une base de D et de $\dim(D) = 1$.

- Par définition $P = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$. On a donc :

$$\begin{aligned} P &= \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} \\ &= \{(-2\alpha+\beta, \alpha, \beta), \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\alpha(-2,1,0) + \beta(1,0,1), \alpha,\beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{(-2,1,0),(1,0,1)\}. \end{aligned}$$

Note : la seconde égalité s'obtient en ré le syst. à une seule équation $\{x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, en pivotant sur x_1, càd en considérant x_2 et x_3 comme variables secondaires et x_1 comme variable principale.

Il est facile alors de vérifier que $\{(-2,1,0),(1,0,1)\}$ est une base de P : c'est évidemment une famille génératrice et on peut facilement démontrer qu'elle est libre. Donc $\dim(P) = 2$.

(1)

1. On veut démontrer que $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$.

Montrons d'abord que D et P sont en somme directe. Il suffit pour cela de démontrer que $D \cap P = \{(0,0,0)\}$. Soit $(x_1, x_2, x_3) \in D \cap P$. Puisque $(x_1, x_2, x_3) \in D$, il est multiple scalaire de $(-1,1,2)$: $\exists \lambda \in \mathbb{R} / (x_1, x_2, x_3) = \lambda(-1,1,2)$. $= (-\lambda, \lambda, 2\lambda)$ et, puisque $(x_1, x_2, x_3) \in P$, on doit avoir $(-\lambda) + 2(\lambda) - (2\lambda) = 0$ càd $\lambda = 0$. On a donc bien $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$.

A ce stade, on a donc démontré que :

$$D + P = D \oplus P \subseteq \mathbb{R}^3.$$

La Prop. VI.2.10 du cours assure que l'on a $\dim(D \oplus P) = \dim(D) + \dim(P) = 1 + 2 = 3$. On sait que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ (cf. cours, Ex. VI.2.5). Avec la Prop. VI.2.8 on obtient donc que $D \oplus P = \mathbb{R}^3$.

Commentaire : comme $P \oplus D = \mathbb{R}^3$, on peut considérer la projection sur P, parallèlement à D. On rappelle que cette proj. est définie ainsi :

$$\begin{array}{rccc} p : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & x & \longmapsto & x_P \\ & \| & & \\ & x_P + x_D & & \end{array}$$

2. On souhaite déterminer l'expression explicite (on dit aussi "expression analytique") de p. Cela signifie que, étant donné (x_1, x_2, x_3), on veut calculer l'exp. de $p((x_1, x_2, x_3))$ en fonct° de x_1, x_2 et x_3. Autrement dit, on veut expliciter p ainsi :

$$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (\ ,\ ,\ )$$

↑ ↑ ↑ expression en fonct° de x_1, x_2, x_3

on note a_{ij}, $1 \leq i, j \leq 3$, les coeff. de l'exp. de $p((x_1, x_2, x_3))$ en fonct° de x_1, x_2, x_3. Autrement dit, on pose :

$$p((x_1, x_2, x_3)) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

<u>Observation importante</u> : notons e_1, e_2, e_3 les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Avec les notations ci-dessus :

$$p(e_1) = p((1,0,0)) = (a_{11}, a_{21}, a_{31}) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3$$
$$p(e_2) = p((0,1,0)) = (a_{12}, a_{22}, a_{32}) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{23}e_3$$
$$p(e_3) = p((0,0,1)) = (a_{13}, a_{23}, a_{33}) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$$

Cela peut s'exprimer en termes de matrices :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$p(e_1)$ $p(e_2)$ $p(e_3)$

matrice de p relat. à la b.c. $\mathcal{E}$

càd que la 1ère colonne de cette matrice donne les coord. ds $\mathcal{E}$ de $p(e_1)$, ---- .

Bilan : les a_{ij} que l'on cherche se trouvent dans la matrice de p relat. à la base canonique.

Malheureusement, la base canonique n'est pas bien adaptée à e_1, e_2, e_3 car l'image de e_1, e_2, e_3 par p est difficile à calculer : il faudrait, pour chacun, calculer la composante sur P et D de son image.

L'observation ci-dessus mène à l'idée suivante : au lieu de travailler avec la base canonique, on va travailler avec une autre base, plus adaptée à p, c'est-à-dire dont les vecteurs sont dans D ou ds P.

En revenant aux préliminaires, on est amené à poser :

$f_1 = (-2, 1, 0)$, $f_2 = (1, 0, 1)$, $f_3 = (-1, 1, 2)$.

La famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puisque $\{f_1, f_2\}$ est une base de P, $\{f_3\}$ une base de D et $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.

Or, et c'est le point crucial, la matrice de p relativement à $\mathcal{F}$ est très facile à calculer :

comme f_1 et f_2 sont dans P et f_3 dans D, la déc. de f_1, f_2, f_3 en comp. sur $P+D$ est :

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1 + 0 \\ f_2 &= f_2 + 0 \\ f_3 &= 0 + f_3 \end{aligned}$$

Donc
$$\begin{aligned} p(f_1) = f_1 &= 1.f_1 + 0.f_2 + 0.f_3 \\ p(f_2) = f_2 &= 0 f_1 + 1 f_2 + 0 f_3 \\ p(f_3) = 0 &= 0 f_1 + 0 f_2 + 0 f_3 \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il reste à voir comment déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p)$ de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(p)$. Or cela se fait facilement avec les formules de <u>changement de base</u>.

Notons $\mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$. Il s'agit de

$$\mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} f_1 & f_2 & f_3 \end{matrix}$$

Elle donne, en colonne, les coord. des vecteurs de $\mathcal{F}$ relat. à $\mathcal{E}$.

Le cours assure alors que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(p) = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}^{-1} \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) \, \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$$

$$= \mathrm{Pass}_{\mathcal{F},\mathcal{E}} \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) \, \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$$

puisque $\mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}^{-1} = \mathrm{Pass}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$.

Calculons donc $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}^{-1} = P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$. On a

$$\begin{cases} f_1 = -2e_1 + e_2 \\ f_2 = e_1 + e_3 \\ f_3 = -e_1 + e_2 + 2e_2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} e_1 + e_3 = f_2 \\ -e_1 + e_2 + 2e_3 = f_3 \\ -2e_1 + e_2 = f_1 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} e_1 + e_3 = f_2 \\ e_2 + 3e_3 = f_2 + f_3 \\ e_2 + 2e_3 = 2f_2 + f_1 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} e_1 + e_3 = f_2 \\ e_2 + 3e_3 = f_2 + f_3 \\ -e_3 = f_1 + f_2 - f_3 \end{cases}$$

Donc

$$e_3 = -f_1 - f_2 + f_3$$

$$e_2 = f_2 + f_3 - 3(-f_1 - f_2 + f_3) = 3f_1 + 4f_2 - 2f_3$$

$$e_1 = f_2 - (-f_1 - f_2 + f_3) = f_1 + 2f_2 - f_3$$

Et donc

$$\mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}^{-1} = \mathrm{Pass}_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{matrix}$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(p)\ \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}^{-1}.$$

On trouve alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire que :

$$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (-2x_2 + x_3,\ x_1 + 3x_2 - x_3,\ 2x_1 + 4x_2 - x_3).$$