Exercice VI.8.21

Préliminaires :

1) Etant données deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel λ, on peut définir les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lambda.(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : pour tout n de $\mathbb{N}$,

le terme d'indice n de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_n + v_n$;

" " " " " " $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est λu_n.

Il est alors facile de vérifier que les lois + et . sont des l.c.i. sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et qu'elles font de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$ un $\mathbb{R}$-e.v.

2) Pour tout entier naturel i, on définit la suite e_i dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme suit : le terme d'indice n de e_i est 1 et, pour tout entier j différent de i, le terme d'indice j de e_i est 0.

Il est alors facile de vérifier le point suivant :

---

la famille $\mathcal{E} = \{e_i, i \in I\}$ est libre. Il s'ensuit que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension infinie.

Attention cependant : $\mathcal{E}$ n'engendre pas $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

En effet, $\mathrm{Vect}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des comb. linéaires (finies) de vecteurs de $\mathcal{E}$. Donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{E})$ est l'ensemble des suites de réels dont les termes sont tous nuls à partir d'un certain rang.

1. C'est une question facile. Les détails sont laissés au lecteur.

2. On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$$

On doit démontrer trois propriétés :

(i) φ est une application linéaire ;

(ii) φ est injective ;

(iii) φ est surjective.

<u>Attention :</u> il n'est pas possible ici d'utiliser le Théorème VI.2.18. En effet, à ce stade, on sait que $\mathbb{R}^3$ est de dim. finie égale à 3, mais on ne sait pas si E est de dim. finie et encore moins quelle est sa dimension (si toutefois elle est finie).

En fait, c'est précisément le but de cette question que de démontrer que E est de dim. finie et égale à 3. On va donc devoir procéder de façon plus rusée !

Le fait que φ est une application linéaire est facile à démontrer. Les détails sont laissés au lecteur.

Pour les ptés (ii) et (iii), on va en fait procéder simultanément en définissant une applicat° inverse de φ.

Il est connu qu'on peut <u>construire</u> des suites par récurrence. En effet, si l'on se donne trois réels a, b, c, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et une seule, telle que :

$$u_0 = a$$
$$u_1 = b$$
$$u_2 = c$$

et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = -\frac{1}{2}\left(u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n\right)$ (*)

Ainsi, à partir de u_0, u_1, u_2 et (*), on peut calculer u_4 ; puis à partir de u_1, u_2, u_3, on peut calculer u_5 ; etc.

<u>Attention</u> : le processus "de proche en proche" évoqué ci-dessus, ne justifie pas l'existence d'une telle suite. Pour démontrer cette existence (et unicité), il faut utiliser le Théorème II.1.4. (dit Théorème de Dedekind). Dans le présent cours, on admet l'existence et l'unicité d'une telle suite.

On peut donc définir une application comme suit :

$$\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

qui, à tout (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ associe l'unique suite (récurrente linéaire) ci-dessus.

Il est alors clair que $\varphi \circ \psi = id_{\mathbb{R}^3}$ puisque les trois premiers termes de la suite assoc. à $(a,b$ et c sont, par déf., a, b et c.

Il est aussi facile de démontrer que $\psi \circ \varphi = id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$, à nouveau par définition.

[illegible]

En conclusion : φ et ψ sont des appl. lin. et elles sont inverses l'une de l'autre.

Ceci est très utile pour la raison suivante. L'Exercice VI.8.9 assure en effet que, φ étant un isomorphisme d'e.v., l'image de toute base de $\mathbb{R}^3$ par φ est une base de E.

On peut appliquer cela à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et conclure que la famille

$$\mathcal{E} = \{ \psi((1,0,0)), \psi((0,1,0)), \psi((0,0,1)) \}$$

est une base de E. Donc E est de dim. finie égale à 3.

[illegible]

2. On commence par une observation.

Bien que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ soit simple à manipuler, le calcul de $\varphi((1,0,0))$, $\varphi((0,1,0))$ et $\varphi((0,0,1))$ s'avère plus compliqué qu'on pourrait le croire. L'étude de E va passer par la description d'une autre base que $\mathcal{E}$. C'est l'objet de cette question.

Soit q un réel non nul et $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite géométrique de premier terme 1 et raison q.

On cherche à savoir à quelle condition $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E. Or :

$(q^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\quad 2q^{n+3} + q^{n+2} - 5q^{n+1} + 2q^n = 0$

$\Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N},\quad q^n\left(2q^3 + q^2 - 5q + 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2q^3 + q^2 - 5q + 2 = 0$

$\Leftrightarrow q \in \left\{+1, \frac{1}{2}, -2\right\}$.

Les suites géométriques de premier terme 1 qui sont dans E sont donc :

$$(1^n)_{n\in\mathbb{N}},\ \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ \left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

L'énoncé suggère que ces suites permettent de trouver une base de E. Comme E est de dim. 3, la famille

$$\mathcal{F} = \left\{ (1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right\}$$

sera bien une base de E si, et seulement si, son image par φ est une base de $\mathbb{R}^3$ (cf. l'Exercice VI·8·9).

Mais : $\varphi\left((1^n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$

$\varphi\left(\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right) \in \mathbb{R}^3$

$\varphi\left(\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (1,-2,4) \in \mathbb{R}^3$.

La question devient donc : la famille $\{(1,1,1), (1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}), (1,-2,4)\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Il est facile de vérifier que cette famille est libre et, comme $d = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, c'est donc bien une base de $\mathbb{R}^3$. En conclusion $\mathcal{F}$ est une base de E.

4. On cherche à exprimer explicitement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\varphi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (0,1,1)$.

On va, pour cela, utiliser la base $\mathcal{F}$ de E calculée à la question 3 : comme $\mathcal{F}$ est une base de E, il existe un unique triplet (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tq

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = x\left(1^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + y\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + z\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

et, en appliquant φ à cette égalité, on obtient l'égalité équivalente :

$$(0,1,1) = x(1,1,1) + y\left(1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4}\right) + z(1,-2,4)$$

càd $$(0,1,1) = \left(x+y+z,\ x+\tfrac{1}{2}y-2z,\ x+\tfrac{1}{4}y+4z\right)$$

càd $$\begin{cases} x+y+z &= 0 \\ x+\frac{1}{2}y-2z &= 1 \\ x+\frac{1}{4}y+4z &= 1 \end{cases}$$

càd, en appliquant la méthode du pivot :

$$x = \frac{5}{3}\ ,\ y = -\frac{8}{5} \quad \text{et} \quad z = -\frac{1}{15}$$

On conclut que :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{5}{3}(1^n)_{n\in\mathbb{N}} - \frac{8}{5}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} - \frac{1}{15}\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{5}{3} - \frac{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{15}(-2)^n.$$

Commentaires :

1) La question 2) détermine une appl. qui assure qu'une suite de E est complètement déterminée par ses trois premiers termes. Toute question sur les élts de E est ainsi ramenée à une question sur $\mathbb{R}^3$. La question 3) détermine une base de E, simple en ceci qu'elle ne met en jeu que des suites géométriques et la base de $\mathbb{R}^3$ qui lui correspond par φ.

La question 4) peut ainsi être résolue en transférant le pb de $\mathbb{R}^3$. C'est ce qu'on a fait plus haut.

2) On note que, en procédant de même, on peut déterminée explicitement la suite de E dont les trois premiers termes sont $u_0 = a$, $u_1 = b$, $u_2 = c$, et ceci pour tous réels a, b et c.

3/ Dans la question précédente, on a réalisé un processus important : les suites récurrentes considérées (via la donnée de leurs trois premiers termes et de la formule de récurrence) ont été réexprimées de façon explicite, càd en donnant chaque terme en fonction de n.

C'est une réalisation très importante : bcp de propriétés d'une suite de E ne peuvent pas être directement obtenues par la déf. par récurrence. Voici un ex.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Comment savoir si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou non. Si l'on a l'exp. explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = x\left(1^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + y\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + z\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

il est clair que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. ssi $z = 0$. En effet, la suite $(1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc conv., la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ conv. vers 0 et la suite $\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

5) Cette question va aussi être résolue en transférant le problème dans $\mathbb{R}^3$. Bien sûr, on va utiliser pour cela la base $\mathcal{F}$ et son image dans $\mathbb{R}^3$ (qui n'est pas la base canonique).

Observation : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E et soient x, y, z ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$:

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = x\,(1^n)_{n\in\mathbb{N}} + y\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + z\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

On a $u_0 = x + y + z$.

(*) Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ ssi $x + y + z = 0$

Note : Ceci montre que $\varphi(F)$ est l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ composé des vecteurs dont les coord. relatives à la base $\varphi(\mathcal{F}) = \left((1,1,1), (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}), (1, -2, 4)\right)$ ont une somme nulle.

⚠ l'éq. $x+y+z=0$ est l'éq. de $\varphi(F)$ relativement à la base $\varphi(\mathcal{F})$!

Reprenons maintenant (*). Cette assertion assure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ ssi $x = -y - z$, c'est-à-dire ssi :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-y-z)\,(1^n)_{n\in\mathbb{N}} + y\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + z\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

c'est-à-dire si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\nabla)$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = y\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1^n\right]_{n\in\mathbb{N}} + z\left[(-2)^n - 1^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$

Notons $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $t = (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

$$t_n = (-2)^n - 1^n = (-2)^n - 1$$

Alors : (i) s et t sont dans F ;

(ii) $F = \text{Vect}\{s, t\}$ cf. (∇)

Il est facile de vérifier que s et t sont linéairement indépendantes (détails en exercice). Donc $\{s, t\}$ est une base de F.

Concl. supl. : cet exercice met clairement en évidence qu'il est parfois utile, voire indispensable, de considérer et utiliser une base de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas la base canonique.