VI.8.23

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. On peut choisir (arbitrairement) une base $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ de E, cf. Théo. VI.1.32 et Déf. VI.2.4). D'après le Théo. VI.2.12, il existe alors une application linéaire

$$f : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$$

telle que $f(b_i) = e_i$ pour $1 \leq i \leq n$ (où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$). Mais, par définition, f envoie la base $\mathcal{B}$ de E sur une base de f, ce qui assure que f est un isomorphisme (cf. Exercice VI.8.3). Donc E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Commentaire : Il faut bien prendre conscience que l'application f ci-dessus dépend du choix initial de $\mathcal{B}$. En fait, il existe autant d'applications f que de bases de E.

2. Soient E et F deux espaces vectoriels isomorphes, et soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Supposons que E est de dimension finie, égale à $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est un isomorphisme, il envoie toute base de E sur une base de F (cf. Ex. VI. 8. 3). Soit $\mathcal{E}$ une base de E, $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$. On a donc que $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$ est une base de F. Ceci implique que F est de dimension finie, égale à n.

Réciproquement, supposons que E et F sont tous deux de dim. finie et que leurs dimension commune est $n \in \mathbb{N}^*$. La question 1 assure qu'il existe un isomorphisme $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$ et un isomorphisme $g : F \longrightarrow \mathbb{K}^n$. Alors $g^{-1} \circ f$ est un isomorphisme entre E et F :

