VI.8.24

C'est un exercice élémentaire et facile.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Soit $v \in E \setminus H$. On note que $v \neq 0$, puisque $0 \in H$. On commence par démontrer que $H \cap \mathbb{K}v = \{0\}$. Soit $w \in H \cap \mathbb{K}v$. Puisque $w \in \mathbb{K}v$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tq $w = \lambda v$. Supposons $w \neq 0$, alors nécessairement $\lambda \neq 0$ et on a $v = \frac{1}{\lambda} w$. Donc $v \in H$, puisque $w \in H$. C'est une contradiction. On en déduit que $w = 0$, ce qui prouve que

$$H \cap \mathbb{K}v = \{0\}.$$

La somme $H + \mathbb{K}v$ est donc directe (cf. Proposition VI.1.24). On a donc

$$H + \mathbb{K}v = H \oplus \mathbb{K}v \subseteq E.$$

Enfin, d'après la Prop. VI.2.10,

$$\begin{aligned} \dim(H \oplus \mathbb{K}v) &= \dim(H) + \dim \mathbb{K}v \\ &= \dim(E) - 1 + 1 \\ &= \dim(E). \end{aligned}$$

En effet, $\dim(H) = \dim(E) - 1$ car H est un hyperplan, et $\dim(\mathbb{K}v) = 1$ car $v \neq 0$.

Il reste à appliquer la Proposition VI.2.8 pour aboutir à $E = H \oplus \mathbb{K}v$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) On commence par observer que $H \subset E$ (inclusion stricte) puis $\dim(H) \neq \dim(E)$. Il existe donc un vecteur $v \in E \setminus H$ et v ne peut pas être nul, car $0 \in H$. L'assertion (ii) s'applique alors et assure que $E = H \oplus \mathbb{K} v$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Comme $v \neq 0$, $\mathbb{K} v$ est de dimension 1 (car $\{v\}$ est une base de $\mathbb{K} v$). De plus, comme $E = H \oplus \mathbb{K} v$, on a $\dim(E) = \dim(H) + 1$ (cf. Prop. VI. 2.30). Donc $\dim(H) = \dim(E) - 1$, c'à d que H est un hyperplan.