VI.8.45

On considère $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Par définition, cela signifie que :

$$f(e_1) = e_1 - 3e_2 - 2e_1 ,$$
$$f(e_2) = e_1 - 3e_2 - 2e_1 ,$$
$$f(e_3) = -e_1 + 3e_2 + 2e_1 .$$

Donc $f(e_2) = f(e_1)$ et $f(e_3) = -f(e_1)$

Sur l'image de f : la Prop. VI.2.14 assure que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} \\ &= \mathrm{Vect}\{f(e_1)\} \\ &= \mathrm{Vect}\{(1, -3, -2)\} . \end{aligned}$$

En particulier, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.

Sur le noyau de f :

Le Théorème du rang et ce qui précède garantissent que $\dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2$.

On déduit facilement de cela une "description par base" de $\ker(f)$. En effet, comme $f(e_1)=f(e_2)$ et $f(e_1)=-f(e_3)$, on a que $f(e_1-e_2)=0$ et $f(e_1+e_3)=0$. Donc

$$\text{Vect}\{e_1-e_2,\ e_1+e_3\} \subseteq \ker(f)$$

Mais, e_1-e_2 et e_1+e_3 sont linéairement indép. (c'est facile à vérifier). Donc $\text{Vect}\{e_1-e_2,\ e_1+e_3\}$ est de dimension 2. D'où :

$$\ker(f) = \text{Vect}\{e_1-e_2,\ e_1+e_3\}.$$

Alternativement, on peut décrire $\ker(f)$ par équation. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a :

$$f((x,y,z))=0 \iff \begin{cases} x+y-z=0 \\ -3x-3y+3z=0 \\ -2x-2y+2z=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-z=0 \end{cases}$$

D'où $\ker(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$.

On observe ainsi que $e_1-3e_2-2e_1=(1,-3,-2)$ est dans $\ker(f)$. Donc $\text{Im}(f)\subseteq\ker(f)$.

Pour démontrer l'existence d'une base relat. à laquelle la matrice de f est B, on procède par analyse-synthèse. Cela signifie qu'on cherche à identifier les contraintes que pèseraient sur une telle base.

Supposons que $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une telle base. Alors, on doit avoir :

$$f(f_1) = 0, \quad f(f_2) = f_1, \quad f(f_3) = 0.$$

Donc :

1) f_1, f_2, f_3 doivent être lin. indép.,
2) f_1, f_3 doivent être ds $\ker(f)$
3) f_1 doit être ds $\mathrm{Im}(f)$
4) on doit avoir la relation $f_1 = f(f_2)$.

En fait, et toujours par définition, toute famille de trois vecteurs qui vérifient les cond. 1) à 4) ci-dessus convient.

Cela restreint drastiquement les bases candidates et va permettre d'en déterminer une explicitement

La condition 3) détermine presque f_1.
D'après la page 1, il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tq

$$f_1 = \lambda(1, -3, -2).$$

On peut même préciser un point :

si $\{f_1, f_2, f_3\}$ convient, alors $\{\frac{1}{\lambda} f_1, \frac{1}{\lambda} f_2, f_3\}$ aussi. On peut donc supposer, sans perdre rien, que $\lambda = 1$.

Posons donc $f_1 = (1, -3, -2)$.

Alors, pour (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on a

$$f((a,b,c)) = (a + b - c, -3(a+b-c), -2(a+b-c)).$$

Donc $f((a,b,c)) = f_1$ ssi $a + b - c = 1$.

On peut donc prendre, par ex., $f_2 = (1, 0, 0)$.

Comme f_1 et f_2 sont lin. indép. (la vérif. est facile), on est en bon chemin. Il reste à choisir f_3 de sorte que $f_3 \in \ker(f)$ et f_1, f_2, f_3 soient lin. indép. La description, page 1, du noyau de f donne beaucoup de choix : prenons $f_3 = (1, 0, 1) = e_1 + e_3$.

On a bien $f_3 \in \ker(f)$ et il reste à vérifier que f_1, f_2, f_3 sont lin. indép.

Vérifions cela (par une méth. plus rosée que d'habitude). Si α, β, γ tq

$$\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 = 0$$

en appliquant f à cette égalité, on trouve que

$$\alpha f(f_1) + \beta f(f_2) + \gamma f(f_3) = 0.$$

càd que $\beta f_1 = 0$. Donc $\beta = 0$.
Enfin, f_1 et f_3 ne sont pas proportionels donc ne sont pas liés. Il s'ensuit que $\alpha = \gamma = 0$.

Concl.: $\{f_1, f_2, f_3\}$ convient pour les choix précédents, càd

$$f_1 = (1, -3, -2),$$
$$f_2 = (1, 0, 0),$$
$$f_3 = (1, 0, 1).$$