VI.8.46

1ère méthode : à la main (cf. VI.8.15).

On échelonne le syst. $\mathcal{S}_{a,b,c,d,e}$ suivant, que l'on résout par la méth. du pivot.

Soit a, b, c, d, e dans $\mathbb{R}$

$$\mathcal{S}_{a,b,c,d,e} = \begin{cases} x - 2y - z + 3t = a \\ 5x + 14y + 3z - t = b \\ 2x + 23y + 7z - t = c \\ 3y + z - 2t = d \\ -x + 5y + 2z = e \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_{a,b,c,d,e} \iff \begin{cases} x - 2y - z + 3t = a \\ 24y + 8z - 16t = b - 5a \\ 27y + 9z - 7t = c - 2a \\ 3y + z - 2t = d \\ 3y + z + 3t = a + e \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 2y - z + 3t = a \\ 3y + z - 2t = \frac{b-5a}{8} \\ 27y + 9z - 7t = c - 2a \\ 3y + z - 2t = d \\ 3y + z + 3t = a + e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - z + 3t = a \\ 3y + z - 2t = \dfrac{b-5a}{8} \\ 11t = \dfrac{29a - 9b + 8c}{8} \\ 0 = \dfrac{-5a + b - 8d}{8} \\ 5t = \dfrac{13a - b + 8e}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - z + 3t = a \\ 3y + z - 2t = \dfrac{b-5a}{8} \\ t = \dfrac{13a + 8e - b}{40} \\ t = \dfrac{29a - 9b + 8c}{88} \\ 0 = 5a - b + 8d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - z + 3t = a \\ 3y + z - 2t = \dfrac{b-5a}{8} \\ t = \dfrac{13a - b + 8e}{40} \\ 0 = a - 17b + 20c - 44e \\ 0 = 5a - b + 8d \end{cases}$$

On a alors

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Sol}\left(\mathcal{S}_{0,0,0,0,0}\right)$$

$$= \left\{ (\alpha, -\alpha, 3\alpha, 0),\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left\{ (1, -1, 3, 0) \right\}$$

et $\mathrm{Im}(f) = \left\{ (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \,/\, a - 17b + 20c - 44e = 0 \right.$
$\left. \text{et} \quad 5a - b + 8d = 0 \right\}$

Ainsi : $\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = 1$

$\dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) = 3$ (cf. Théo. du rang)

Note : Ce qui précède donne une description de $\mathrm{Ker}(f)$ par éq. (les trois éq. non triviales de $\mathcal{S}_{0,0,0,0,0}$ après pivot) et par base ainsi qu'une description par équations de $\mathrm{Im}(f)$.

Il reste à donner une description par base de $\mathrm{Im}(f)$.

On sait (Prop. VI.2.14) que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4) \right\}.$$

Cependant, $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$ sont liés. En effet, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$. L'un d'eux est donc comb. lin. des 3 autres. Il reste à préciser lequel.

La solution est dans le noyau ! En effet,

$$(1, -1, 3, 0) \in \mathrm{Ker}(f)$$

càd que $\quad f(e_1 - e_2 + 3e_3) = 0$

càd que $\quad f(e_1) - f(e_2) + 3f(e_3) = 0.$

Il s'ensuit que $f(e_1)$ est c.l. de $f(e_2), f(e_3)$
ou $f(e_2)$ " " " $f(e_1), f(e_3)$
ou $f(e_3)$ " " " $f(e_1), f(e_2)$

<u>Attention</u> : on voit donc ici que, dans la famille $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)\}$ qui engendre $\mathrm{Im}(f)$, on peut se passer de $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$, <u>mais pas</u> de $f(e_4)$. (cela vient au coeff. 0 dans $(1, -1, 3, 0) \in \mathrm{Ker}(f)$.)

Concl : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\{f(e_1), f(e_3), f(e_4)\}$.

2ème méthode (malheureusement incomplète)

On peut obtenir une description de $\mathrm{Im}(f)$, par base et par équations en résolvant seulement $S_{0,0,0,0,0}$, ce qui simplifie pas mal les calculs.

De même procédé qu'avec la première méth. pour et ensuite d'obtenir une base pour $\mathrm{Im}(f)$. Malheureusement, la résol. de $S_{0,0,0,0,0}$ ne donne pas directement la description de $\mathrm{Im}(f)$ par équations.

Cette deuxième méthode est donc incomplète de résultat qu'elle fournit.

Note: de la description par base d'un sev. de $\mathbb{R}^n$, on peut en fait déduire une descript° par équations. Il faut pour cela utiliser la théorie de la dualité, et en particulier les bases duales.