VI.8.48

On note $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la b.c. de $\mathbb{R}^3$.

On note f et g les endo. de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (2x-3y+7z,\ x-y-z,\ 3x-y)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$e_1 \longmapsto e_1+e_2+e_3$$
$$e_2 \longmapsto 5e_1+e_2-3e_3$$
$$e_3 \longmapsto e_1-e_3$$

On veut étudier $g\circ f : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$.
Pour cela, on doit commencer par exprimer $g\circ f$.
On fera cela de deux façons différentes : par l'image des vecteurs de $\mathcal{E}$ par $g\circ f$, et par l'expression analytique de $g\circ f$. Ces deux descriptions vont en fait se déduire du calcul de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g\circ f)$.

Enfin, le calcul de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g\circ f)$ va découler du calcul préalable de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g)$.

Description de f : De la définition de f il découle facilement que :

$$f(e_1) = f((1,0,0)) = (2,1,3) = 2e_1 + e_2 + 3e_3$$
$$f(e_2) = f((0,1,0)) = (-3,-1,-1) = -3e_1 - e_2 - e_3$$
$$f(e_3) = f((0,0,1)) = (7,-1,0) = 7e_1 - e_2$$

On a donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$
$$f(e_1) \quad f(e_2) \quad f(e_3)$$

Description de g :

La définition de g donne immédiatement :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$
$$g(e_1) \quad g(e_2) \quad g(e_3)$$

Le cours assure alors que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(f)$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & -9 & 2 \\ 3 & -4 & 6 \\ -4 & 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$$\qquad\quad g\circ f(e_1) \quad g\circ f(e_2) \quad g\circ f(e_3)$$

De cela, on peut déduire l'expression analytique de $g\circ f$ et l'image de $\mathcal{E}$ par cette application.
Par déf. de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(g\circ f)$, on a :

$$g\circ f(e_1) = 10\,e_1 + 3e_2 - 4e_3$$
$$g\circ f(e_2) = -9e_1 - 4e_2 + e_3$$
$$g\circ f(e_3) = 2e_1 + 6e_2 + 10e_3 .$$

Il en découle que, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$g\circ f((x,y,z)) = g\circ f(xe_1 + ye_2 + ze_3)$$
$$= x\,g\circ f(e_1) + y\,g\circ f(e_2) + z\,g\circ f(e_3)$$
$$= x(10e_1 + 3e_2 - 4e_3) + y(-9e_1 - 4e_2 + e_3) + z(2e_1 + 6e_2 + 10e_3)$$
$$= (10x - 9y + 2z)e_1 + (3x - 4y + 6z)e_2 + (-4x + y + 10z)e_3$$
$$= (10x - 9y + 2z,\ 3x - 4y + 6z,\ -4x + y + 10z).$$

Ainsi :

$$g\circ f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \longmapsto (10x-9y+2z,\ 3x-4y+6z,\ -4x+y+10z)$$

Le calcul de $\ker(g\circ f)$ et $\mathrm{Im}(g\circ f)$, par la dét. d'une base et par équation se mène alors comme d'habitude.

Pour $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, on étudie le système :

$$\mathcal{S}_{a,b,c} = \begin{cases} 10x - 9y + 2z = a \\ 3x - 4y + 6z = b \\ -4x + y + 10z = c \end{cases}$$

On observe que les coeff. de y sont plus maniables que ceux de x et z ; on pense à éliminer x et y dans les éq. et on replace la 3ème éq. en 1ère position :

$$\mathcal{S}_{a,b,c} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 4x + 10z = c \\ -4y + 3x + 6z = b \\ -9y + 10x + 2z = a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 4x + 10z = c \\ -13x + 46z = b + 4c \\ -26x + 92z = a + 9c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 4x + 10z = c \\ 13x - 46z = -b - 4c \\ 26x - 92z = -a - 9c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 4x + 10z = c \\ 13x - 46z = -b - 4c \\ 0 = a - 2b + c \end{cases}.$$

En particulier, $\mathcal{S}_{a,b,c}$ admet des solutions si, et seulement si, $a - 2b + c = 0$.

Et, l'ens. des sol. de $\mathcal{S}_{0,0,0}$ est :

$$\left\{ \left(+\frac{46}{13}\alpha, +\frac{54}{13}\alpha, \alpha \right), \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ (46, 54, +13) \right\}.$$

De la "résolution" de $\mathcal{S}_{a,b,c}$ par la méth. du pivot, on peut maintenant déduire toutes les réponses souhaitées.

Noyau de $g \circ f$:

$$\mathcal{S}_{0,0,0} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 4x + 10z = 0 \\ 13x - 46z = 0 \end{cases}$$

On en tire que

$$\ker(g \circ f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \; y - 4x + 10z = 0 \text{ et } 13x - 46z = 0\}$$

et comme $\ker(g \circ f) = \mathrm{Sol}(\mathcal{S}_{0,0,0})$, il vient que :

$$\ker(g \circ f) = \mathrm{Vect}\{(46, 54, 13)\}.$$

Image de $g \circ f$

On sait que, $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b,c) \in \mathrm{Im}(f)$ ssi $\mathcal{S}_{a,b,c}$ a un ensemble de solutions non vide.

Donc $\mathrm{Im}(g \circ f) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / \; a - 2b + c = 0\}$.

On sait aussi que

$$\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Vect}\{g \circ f(e_1), g \circ f(e_2), g \circ f(e_3)\}$$

$$= \mathrm{Vect}\{(10, 3, -4), (-3, -4, 1), (2, 6, 10)\}$$

Mais, le théo. du rang assure que

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Im}(f)) &= \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(f)) \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\mathcal{F} = \{g\circ f(e_1), g\circ f(e_2), g\circ f(e_3)\}$ est génératrice de $\mathrm{Im}(g\circ f)$, mais elle n'est pas libre.

Le noyau donne alors une relation entre ces trois vecteurs :

on a $(46, 54, 13) \in \ker(g\circ f)$

càd $46\,e_1 + 54\,e_2 + 13\,e_3 \in \ker(g\circ f)$

càd $g\circ f(46e_1 + 54e_2 + 13e_3) = 0$

càd $46\, g\circ f(e_1) + 54\, g\circ f(e_2) + 13\, g\circ f(e_3)$

Puisque tout vecteur de $g\circ f$ peut s'exprimer comme c.l. des deux autres. Par ex.

$g\circ f(e_3) = -\frac{46}{13} g\circ f(e_1) - \frac{54}{13} g\circ f(e_2)$ et il s'ensuit que

$$\mathrm{Im}(g\circ f) = \mathrm{Vect}\{g\circ f(e_1), g\circ f(e_2)\}.$$