VII.6.12

On considère $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{E}$ est la base canonique de l'e.v.e. $\mathbb{R}^3$.

On commence par observer que la matrice A est symétrique (au sens où ${}^tA = A$). Mais, par ailleurs, $\mathcal{E}$ est une b.o.n. de $\mathbb{R}^3$. Donc, d'après la Proposition 3.9, u est un endo. symétrique.

Le Théorème 3.11 assure alors que u est diag. dans une b.o.n. On suit la Remarque 3.13 pour déterminer une b.o.n. de vect. propres de u.

On trouve facilement que

$$\chi_u = -(X-3)^2(X-12).$$

Donc les v.p. de u sont 3 et 12.

De plus, le Thé. 3.11 assure que

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u - 3\,\mathrm{id}) \oplus \ker(u - 15\,\mathrm{id})$$

avec, plus précisément, $d = \ker(u-3\,\mathrm{id}) = 2$ et $\ker(u-12\,\mathrm{id}) = 1$ et $\ker(u-3\,\mathrm{id}) \perp \ker(u-12\,\mathrm{id})$.

On trouve facilement que, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

1. $(x,y,z) \in \ker(u-3\cdot id)$

ssi $\begin{cases} x-2y+2z=0 \\ -2x+4y-4z=0 \\ 2x-4y+4z=0 \end{cases}$

ssi $x-2y+2z=0$.

Cela confirme que $\ker(u-3\cdot id)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$. On voit facilement que $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) \in \ker(u-3\cdot id)$. Il reste à chercher un vecteur normal f_2, de v.p. 3 et orthogonal à f_1. Si (a,b,c) est un tel vecteur, on doit avoir

$$\begin{cases} a-2b+2c=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

En prenant $c=-1$, on trouve que $f_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(4,1,-1)$ convient.

2. $(x,y,z) \in \ker(u-12\cdot id)$

ssi $\begin{cases} -8x-2y+2z=0 \\ -2x-5y-4z=0 \\ 2x-4y-5z=0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 4x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + 4z = 0 \\ 2x - 4y - 5z = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 0 \\ 2x - 4y - 5z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$

ssi $\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

On voit que $f_3 = \frac{1}{3}(1, -2, +2)$ convient.

Ainsi, la famille $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ est une b.o.n. relativement à laquelle la matrice de u est

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Note : la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$ est $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & 1/3 \\ 1/\sqrt{2} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & 2/3 \end{pmatrix}$

et $P^{-1} = {}^tP$ puisque (cf. Prop. 4.7).

Enfin, la formule de chgt de base donne $D = P^{-1}AP$.