VII.6.25

On va utiliser les résultats de la section 5 § B1 de la partie VII.

Comme l'axe de r est $\mathbb{R}f_1'$, avec $f_1' = (1,-1,2)$, et comme la mesure d'angle de r relative à l'orientat° de $\mathbb{R}f_1'$ par f_1', on a (par déf.) que, dans toute b.o.n.d. qui commence par $f_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$, la matrice de r est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

(puisque $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$).

On commence par déterminer une b.o.n.d. comme ci-dessus. Pour cela, on cherche un vecteur normal f_2 orthogonal à f_1. Par ex.

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0).$$

On cherche à présent un vecteur f_3' tq $\{f_1, f_2, f_3'\}$ soit une b.o.n. On doit avoir $(f_1, f_3') = (f_2, f_3') = 0$ et $\|f_3'\| = 1$, ce qui mène à

$$f_3' = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$$

A ce stade, on a une b.o.n. $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3'\}$. Mais, attention, il nous faut une b.o.n.d.

Calculons le dét. de la matrice de passage de $\mathcal{E}$ (base can. de $\mathbb{R}^3$) à $\mathcal{F}$. On a :

$$P = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1/\sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1/\sqrt{3} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Donc $\det\left(\mathrm{Pass}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}\right) = 1$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est bien une b.o.n.d.

Note : s'il s'était avéré que $\mathcal{F}$ était en fait une b.o.n. indirecte, on aurait pu facilement en déduire une ~~base~~ b.o.n.d. en prenant $-f_3'$ au lieu de f_3.

Ainsi, posons $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ avec $f_3 = f_3'$. La matrice de r relat. à $\mathcal{F}$ est B et la formule de chgt de base assure que :

$$B = P^{-1} A P$$

où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(r)$. On rappelle que $P^{-1} = {}^t P$, puisque P est la matrice de passage d'une b.o.n.d. à une b.o.n.d.

Finalement, on obtient que

$$A = PBP^{-1} = PB^{t}P.$$

Pour calculer A, il reste à effectuer un produit de matrice (ce que je laisse en exercice).