Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, soit $T = X + Y$. On suppose que, pour tout a et tout b, on a :

$$P(X = a | T = a + b) = P(Y = a | T = a + b) = \binom{a+b}{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{a+b}.$$

On suppose par ailleurs que T suit une loi de Poisson de paramètre λ, et l'on demande de déterminer la loi du couple (X, Y). Pour cela, on fixe $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ et l'on calcule $P((X, Y) = (m, n))$, de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
P((X,Y) = (m,n)) &= P((X = m) \cap (T = m + n)) \\
&= P(X = m | T = m + n) \times P(T = m + n) \\
&= \binom{m+n}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m+n} \times \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{m+n}}{(m+n)!} \\
&= \frac{(m+n)!}{m!n!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{m+n} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{(m+n)!} \\
&= \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{m+n} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{m!n!}.
\end{aligned}$$

On en déduit notamment que, pour tout $m \geq 0$:

$$\begin{aligned}
P(X = m) &= P\left(\bigcup_{n \geq 0} [(X,Y) = (m,n)]\right) \\
&= \sum_{n \geq 0} P((X,Y) = (m,n)) \\
&= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{m+n} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{m!n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda/2)^m}{m!} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda/2)^m}{m!} \cdot \mathrm{e}^{\lambda/2} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^m}{m!},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda/2$. Un calcul similaire indique qu'il en va de même pour Y.

Notons en passant qu'il est alors immédiat que $P((X, Y) = (m, n)) = P(X = m) \times P(Y = n)$, c'est-à-dire que X et Y sont indépendantes. Exercice complémentaire : cette dernière propri'eté reste-t-elle vraie si T ne suit pas une loi de Poisson ?