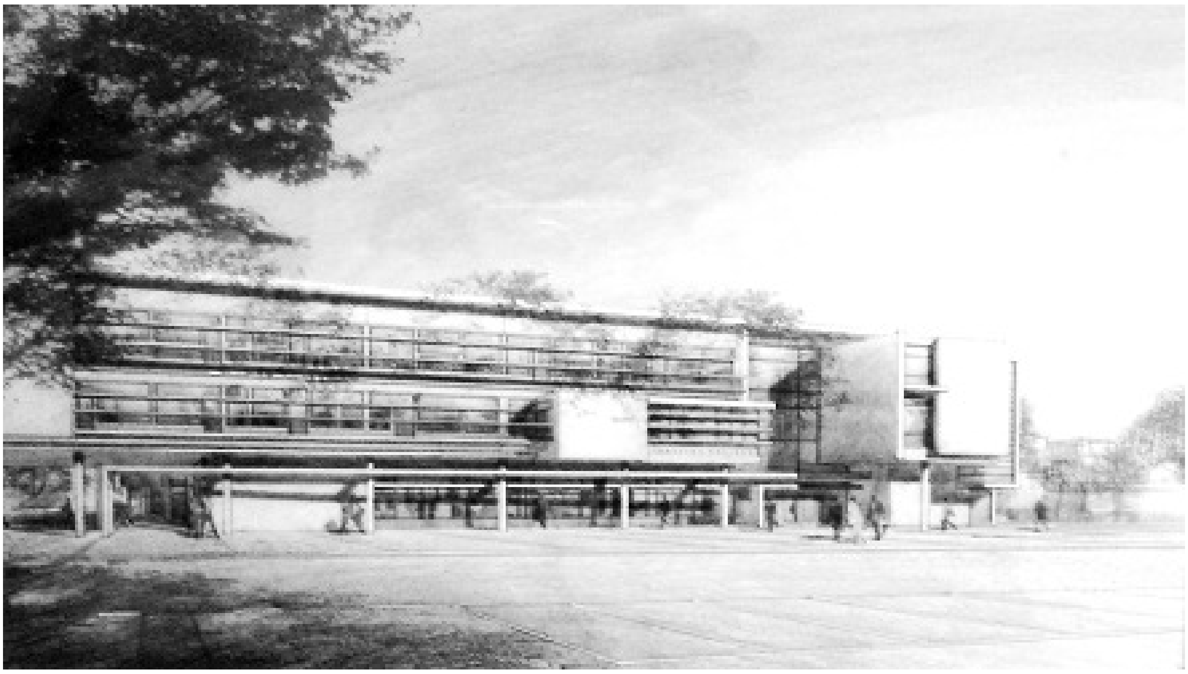
Institut Galilée

Institut Galilée

Sciences et technologies



Licence 1re année

Mathématiques pour les sciences

Premier semestre

Département de Mathématiques

www.math.univ-paris13.fr/depart

Chapitre 1

Développements Limités

1 Développements limités, définitions et unicité

La notion de développement limité permet d'approximer une fonction au voisinage d'un point par un polynôme. Plus le degré de ce polynôme est élevé, meilleure est l'approximation. Concrètement, pour étudier une expression au voisinage d'un point (comme le calcul d'une limite par exemple), il suffira de remplacer les fonctions élaborées par leur développement limité.

Définition 1.0.1 *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0, mais pas forcément en x_0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0, s'il existe des nombres $a_0, a_1, \dots, a_n$ et une fonction $\epsilon : u \mapsto \epsilon(u)$ définie au voisinage de 0 vérifiant*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x - x_0) \quad et \quad \lim_{x \to x_0} \epsilon(x - x_0) = 0$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ s'appelle partie principale du développement limité et le terme $(x - x_0)^n \epsilon(x - x_0)$ s'appelle le reste.

Remarque : Dire que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 signifie qu'il existe des nombres $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) - \cdots - a_n(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} = 0$$

Plus n est grand, meilleure est donc l'approximation de $f(x)$ par le polynôme $a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0.

Remarque importante : La fonction $f : x \mapsto f(x)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 si et seulement si la fonction $g : h \mapsto f(x_0 + h)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. En effet :
Si l'on pose $x = x_0 + h$, on observe que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\epsilon(x - x_0)$$

équivaut à

$$g(h) = f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n\epsilon(h)$$

et $\epsilon(x - x_0)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0 si et seulement si $\epsilon(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

Il suffit donc d'étudier la théorie des développements limités au voisinage de 0.

Exemples :
• Soit n un entier naturel, pour tout $x \neq 1$ on a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Si l'on pose $\epsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$ on a

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet donc un développement limité à tout ordre au voisinage de 0, et on l'a déterminé. Evidemment la fonction ϵ n'est pas toujours aussi simple, mais l'on ne cherche pas en général à la déterminer.

• Soit $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p$ un polynôme. Le polynôme $P(x)$ admet un développement limité en 0 à tout ordre n :
Si $n \geq p$, $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p + x^n\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) = 0$.
Si $n < p$, $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n(a_{n+1}x + \cdots + a_px^{p-n})$ et $\epsilon(x) = a_{n+1}x + \cdots + a_px^{p-n}$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Proposition 1.0.2 (Unicité du D.L.) *Le développement limité d'ordre n d'une fonction f, s'il existe, est unique.*

Preuve : Supposons que f admette un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0. On a

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$$

On a $\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$. Le nombre a_0 est donc unique d'après l'unicité de la limite.
$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-a_0}{x} = a_1$. Le nombre a_1 est donc unique également.
Soit p un entier vérifiant $0 < p \leq n$. Supposons que $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ soient uniques. On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1x - \cdots - a_{p-1}x^{p-1}}{x^p} = a_p$$

et a_p est unique d'après l'unicité de la limite et des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$.

Proposition 1.0.3 *La partie principale du développement limité en* 0 *d'une fonction paire (resp. impaire) est paire (resp. impaire).*

Preuve : Supposons que f admette le développement limité à l'ordre n suivant en 0

$$f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x)$$

On a alors

$$f(-x) = P(-x) + (-1)^n x^n \epsilon(-x)$$

et $(-1)^n \epsilon(-x)$ tend vers 0 en 0 (comme $\epsilon(x)$). Si f est paire (resp. impaire) on a $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$) et d'après l'unicité du développement limité on a $P(-x) = P(x)$ (resp. $P(-x) = -P(x)$). Le polynôme P est donc pair (resp. impair).

2 Opérations sur les développements limités

2.1 Intégration

Supposons que f soit dérivable au voisinage de 0 et que la fonction dérivée f' admette un développement limité à l'ordre n en 0,

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon_1(x).$$

Posons

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{et} \quad Q(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

D'après le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f - Q$:
$t \mapsto f(t) - Q(t)$ entre 0 et x, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x) - Q(x) - (f(0) - Q(0)) = x(f'(\theta x) - Q'(\theta x));$$

Puisque $f'(x) = P(x) + x^n \epsilon_1(x)$ et que $Q'(x) = P(x)$ alors $f'(x) - Q'(x) = x^n \epsilon_1(x)$ et ainsi

$$f(x) - Q(x) - (f(0) - Q(0)) = x^{n+1} \theta^n \epsilon_1(\theta x) = x^{n+1} \epsilon_2(x)$$

où $\lim_{x \to 0} \epsilon_2(x) = \lim_{x \to 0} \theta^n \epsilon_1(x) = 0$. Et puisque $Q(0) = 0$ on a

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \epsilon_2(x)$$

Ce qui fournit la règle suivante :

Si f' *admet un développement limité à l'ordre* n *en* 0, f *admet un développement limité à l'ordre* $n+1$ *en* 0 *dont la partie principale s'obtient en intégrant la partie principale du développement de* f' *et en choisissant* $f(0)$ *comme constante d'intégration.*

Exemples :

• On a

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1} \epsilon(x)$$

donc

$$\begin{aligned}
-\ln(1-x) &= -\ln 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x) \\
&= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)
\end{aligned}$$

• On a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc on obtient le développement limité à l'ordre 1

$$\sin x = x + x\epsilon(x)$$

Par intégration on obtient

$$-\cos x = -\cos 0 + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

donc

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

En intégrant à nouveau on obtient

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin 0 + x - \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x) \\
&= x - \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)
\end{aligned}$$

• On a $\lim_{x\to 0} e^x = 1$ donc

$$e^x = 1 + \epsilon(x)$$

En intégrant et en utilisant $e^0 = 1$ on obtient successivement

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + x\epsilon(x) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\epsilon(x)
\end{aligned}$$

Exercice : Déterminer les développements limités à l'ordre 4 en 0 de $\cos x$ et e^x.

Exercice : Etudier $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$ et $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^3}$.

2.2 Somme et produit

- Somme. Soit :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$$

Additionnons :

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + x^n\epsilon_3(x)$$

avec $\epsilon_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2$. ϵ_3 tend vers 0 dès que ϵ_1 et ϵ_2 tendent vers 0. Ce qui fournit la règle suivante :

Si f et g admettent des développements limités d'ordre n, alors la fonction $f+g$ admet un développement limité d'ordre n dont la partie principale est la somme des parties principale de f et g.

- Produit. Soient :

$$f(x) = A(x) + x^n\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = B(x) + x^n\epsilon_2(x)$$

Multiplions :

$$f(x)g(x) = A(x)B(x) + x^n(A(x)\epsilon_2(x) + B(x)\epsilon_1(x) + x^n\epsilon_1(x)\epsilon_2(x))$$

Gardons dans $A(x)B(x)$ les termes de degré inférieur ou égal à n :

$$A(x)B(x) = C(x) + x^{n+1}D(x) = C(x) + x^n\epsilon_3(x)$$

où $D(x)$ est un polynôme et $\epsilon_3(x) = xD(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0. Le produit $f(x)g(x)$ se mettra donc sous la forme :

$$f(x)g(x) = C(x) + x^n\epsilon_4(x)$$

avec $\epsilon_4(x) = \epsilon_3(x) + A(x)\epsilon_2(x) + B(x)\epsilon_1(x) + x^n\epsilon_1(x)\epsilon_2(x)$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0. D'où la règle :

Le produit admet un développement limité d'ordre n dont la partie principale s'obtient en prenant dans le produit des parties principales les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice : Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $(1+x)e^x$ et le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{e^x}{1-x}$.

2.3 Substitution du type $x \mapsto ax^p$ et composition

-Substitutions. Soit a un réel et p un entier. Supposons que $f(x)$ admette un développement limité à l'ordre n en 0. On a

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x)$$

On en déduit

$$f(ax^p) = a_0 + a_1ax^p + a_2a^2x^{2p}\cdots + a_na^nx^{np} + a^nx^{np}\epsilon(ax^p)$$

$\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 donc $a^n\epsilon(ax^p)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

$f(ax^p)$ admet donc un développement limité à l'ordre np en 0.

Exemple : On a
$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x)$$
donc
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x)$$
Par intégration on obtient alors
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$$

Exercice : Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\frac{1}{1+x^2}$ puis celui de $\arctan x$ à l'ordre 5 en 0.

- Composition de D.L. Soient
$$f(x) = A(x) + x^n\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = B(x) + x^n\epsilon_2(x)$$
Notons $A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ et $B(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ et supposons que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, c'est-à-dire $b_0 = 0$.
Composons :
$$f(g(x)) = A(B(x) + x^n\epsilon_2(x)) + (B(x) + x^n\epsilon_2(x))^n\epsilon_1(B(x) + x^n\epsilon_2(x))$$
- $(B(x) + x^n\epsilon_2(x))^n = x^n(b_1 + b_2x + \cdots + b_nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon_2(x))^n = x^nh(x)$ où $h(x)$ est bornée au voisinage de 0.

- Si l'on pose $\epsilon_3(x) = h(x)\epsilon_1(B(x) + x^n\epsilon_2(x))$ par composition des limites on obtient $\lim_{x\to 0} \epsilon_3(x) = 0$.

- $A(B(x)+x^n\epsilon_2(x)) - A(B(x)) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left[(B(x) + x^n\epsilon_2(x))^k - B(x)^k\right] = \sum_{k=1}^{n} a_kx^n\epsilon_2(x)u_k(x)$ où les fonctions u_k sont bornées au voisinage de 0. Donc $A(B(x) + x^n\epsilon_2(x)) = A(B(x)) + x^n\epsilon_4(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_4(x) = 0$.

On obtient donc $f(g(x)) = A(B(x)) + x^n\epsilon_5(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_5(x) = 0$. Ce qui fournit la règle suivante :

Si f et g admettent des développements limités d'ordre n en 0 avec $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ alors, la composée $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n dont la partie principale s'obtient en prenant dans la composée des parties principales les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple : Pour tout n, e^x admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $\sin x$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$, donc $e^{\sin x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. Déterminons ce développement limité dans le cas $n = 3$.

$\sin x = x - x^3/6 + x^3\epsilon_1(x)$ et $e^u = 1 + u + u^2/2 + u^3/6 + u^3\epsilon_2(u)$ donc

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + (x - x^3/6) + (x - x^3/6)^2/2 + (x - x^3/6)^3/6 + x^3\epsilon_3(x) \\ &= 1 + x - x^3/6 + x^2/2 + x^3/6 + x^3\epsilon_4(x) \\ &= 1 + x + x^2/2 + x^3\epsilon_4(x) \end{aligned}$$

Exercice : Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $e^{\cos x}$.

2.4 Quotient.

Supposons que $f(x)$ et $g(x)$ admettent des développements limités à l'ordre n en 0 et que $\lim_{x\to 0} g(x) = b_0$ soit $\neq 0$. On a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,\frac{1}{g(x)} = f(x)\,\frac{1}{b_0}\,\frac{1}{1 - \frac{b_0 - g(x)}{b_0}}$$

$\frac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, $\frac{b_0-g(x)}{b_0}$ aussi, et $\lim_{x\to 0} \frac{b_0-g(x)}{b_0} = 0$, la composée admet donc un développement limité à l'ordre n en 0. $\frac{1}{g}$ admet donc un développement limité à l'ordre n en 0, donc le produit par f également. Ce qui fournit la règle suivante :

Si f et g admettent des développements limités d'ordre n en 0 avec $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$ alors, le quotient $\dfrac{f}{g}$ admet un développement limité d'ordre n.

Exemple : Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan x$.

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \sin x\,\frac{1}{1 - (1 - \cos x)} \end{aligned}$$

$1 - \cos x = x^2/2 + x^3\epsilon_1(x)$ et $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^3\epsilon_2(u)$ donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - (1 - \cos x)} &= 1 + x^2/2 + (x^2/2)^2 + (x^2/2)^3 + x^3\epsilon_3(x) \\ &= 1 + x^2/2 + x^3\epsilon_4(x) \end{aligned}$$

$\sin x = x - x^3/6 + x^3\epsilon_5(x)$ donc

$$\begin{aligned} \tan x &= (x - x^3/6)(1 + x^2/2) + x^3\epsilon_6(x) \\ &= x + x^3/3 + x^3\epsilon_7(x) \end{aligned}$$

Exercice : Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1 + \sin x}{e^x + 1}$.

3 Formules de Taylor

Les formules de Taylor permettent d'approcher les fonctions par des polynômes. Ce sont des outils fondamentaux en analyse.

3.1 Formule de Taylor-Young

Lorsqu'une fonction f est définie dans un voisinage de x_0 et dérivable en x_0 on a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$$

Il existe donc une fonction ϵ définie au voisinage de x_0 vérifiant

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$$

f admet donc un développement limité à l'ordre 1 en x_0.

Nous allons généraliser cette propriété. Commençons par une définition sur les fonctions plusieurs fois dérivables.

Définition 3.1.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles. On dit que f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I avec une dérivée nième continue sur I.*

• Si f est de classe C^n sur I alors toutes les dérivées successives de f jusqu'à la nième sont continues sur I (pourquoi ?). On dit aussi que f est **n fois continûment dérivable sur** I pour dire que f est de classe C^n sur I.

• Lorsqu'une fonction est de classe C^n pour tout n dans $\mathbb{N}$ on dit qu'elle est de classe C^∞, ou aussi qu'elle est indéfiniment dérivable. Par exemple, les fonctions $x \mapsto e^x$; $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$; $\alpha \in \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^\alpha$; $x \mapsto \ln(1+x)$ ... sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition.

Exercice : Déterminer la dérivée nième des fonctions usuelles suivantes : $x \mapsto e^x$; $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto \cos x$; $\alpha \in \mathbb{R}, x \mapsto (1+x)^\alpha$; $x \mapsto \ln(1+x)$.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème central de ce chapitre :

Théorème 3.1.2 (Formule de Taylor-Young) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n-1$ fois dérivable ($n \in \mathbb{N}^*$) sur I, et admettant une dérivée nième en un point x_0 de I. Alors il existe une fonction ϵ tendant vers 0 quand x tend vers x_0 telle que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\epsilon(x)$$

f admet donc un développement limité à l'ordre n en x_0.

Définition 3.1.3 *La formule précédente est appelée le développement de Taylor-Young de la fonction f à l'ordre n en x_0. Le polynôme de la variable x*

$$P_{f,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

est appelé **partie principale** *et la quantité* $(x-x_0)^n\epsilon(x)$ *est appelée* **reste** *du développement de Taylor-Young.*

Preuve du théorème : La preuve se fait par récurrence sur n. Comme on l'a déjà vu, si $n = 1$ le théorème est vrai. Supposons que le théorème soit vrai pour un entier $n \geq 1$. Nous allons montrer qu'il est vrai pour l'entier $n + 1$.
Soit f n fois dérivable sur I et $n+1$ fois dérivable en x_0. La fonction f' est alors $n-1$ fois dérivable sur I et n fois dérivable en x_0. Nous voulons montrer que

$$f(x) - P_{f,n+1}(x) = (x-x_0)^{n+1}\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0} \epsilon(x) = 0$$

et

$$P_{f,n+1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

D'après l'hypothèse de récurrence

$$f'(x) = P_{f',n}(x) + (x-x_0)^n\epsilon_1(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to x_0} \epsilon_1(x) = 0$$

Remarquons maintenant que

$$P_{f',n}(x) = P'_{f,n+1}(x)$$

On a donc

$$f'(x) - P'_{f,n+1}(x) = (x-x_0)^n\epsilon_1(x)$$

D'après le théorème des accroissements finis il existe c (dépendant à priori de x) compris entre x et x_0 tel que

$$\begin{aligned} f(x) - P_{f,n+1}(x) - (f(x_0) - P_{f,n+1}(x_0)) &= (x-x_0)(f'(c) - P'_{f,n+1}(c)) \\ &= (x-x_0)(c-x_0)^n\epsilon_1(c) \\ &= (x-x_0)^{n+1}\left(\frac{c-x_0}{x-x_0}\right)^n\epsilon_1(c) \end{aligned}$$

Puisque $P_{f,n+1}(x_0) = f(x_0)$ on obtient

$$f(x) = P_{f,n+1}(x) + (x-x_0)^{n+1}\epsilon_2(x)$$

avec

$$\epsilon_2(x) = \left(\frac{c-x_0}{x-x_0}\right)^n\epsilon_1(c)$$

c étant compris entre x et x_0 on a

$$|\epsilon_2(x)| \leq |\epsilon_1(c)|$$

Lorsque x tend vers x_0, c tend vers x_0, donc $\epsilon_1(c)$ tend vers 0 et $\epsilon_2(x)$ tend vers 0. Le théorème est donc vrai pour l'entier $n+1$. □

Remarque : La formule de Taylor-Young va nous permettre de calculer les développements limités de fonctions de références. Mais ce n'est pas en général la méthode la plus appropriée pour déterminer le développement limité d'une fonction, le calcul des dérivées successives pouvant se révéler très compliqué. Il vaut mieux utiliser les opérations sur les développements limités.

Exemple. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 en 1 de la fonction f définie sur $]0,\ 2[$ par :
$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right).$$

• Utilisons la formule de Taylor-Youg à l'ordre 3 au voisinage de 1 :

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{[3]}(1)}{3!}(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon(x).$$

on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\pi}{4}(1 + (f(x)^2), \\ f''(x) &= \frac{\pi}{2}(f(x)f'(x)), \\ f^{(3)}(x) &= \frac{\pi}{2}((f'(x))^2 + f(x)f''(x)). \end{aligned}$$

On trouve alors $f'(1) = \frac{\pi}{4}$, $f''(1) = \frac{\pi^2}{4}$, $f^{(3)}(1) = \frac{\pi^3}{4}$ et

$$\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1 + \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 + \frac{\pi^3}{24}(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon(x).$$

• On aurait pu aussi se ramener au voisinage de zéro avec le changement de variable $x = 1 + h$, et utiliser les D.L. connus en zéro. On obtient d'abord :

$$\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}h\right) = \frac{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}h\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}h\right)}.$$

Puis, pour $h \to 0$, on a $\tan\left(\frac{\pi}{4}h\right) \to 0$, on peut utiliser par exemple un D.L. à l'ordre trois en zéro de $h \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{4}h\right)$ que l'on composera avec un D.L. à l'ordre trois en zéro de $u \mapsto \frac{1+u}{1-u}$. Or

$$\begin{aligned} & \tan\left(\frac{\pi}{4}h\right) &&= \frac{\pi}{4}h + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 h^3 + h^3\varepsilon(h) \\ \text{et} \quad & \frac{1+u}{1-u} &&= (1+u)\left(\frac{1}{1-u}\right) = (1+u)(1 + u + u^2 + u^3 + u^3\varepsilon(u)) \\ & &&= 1 + 2u + 2u^2 + 2u^3 + u^3\varepsilon(u) \\ \text{donc,} \quad & \frac{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4}h\right)}{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4}h\right)} &&= 1 + 2\left(\frac{\pi}{4}h + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 h^3\right) + 2\left(\frac{\pi}{4}h\right)^2 + 2\left(\frac{\pi}{4}h\right)^3 + h^3\varepsilon(h) \\ & &&= 1 + \frac{\pi}{2}h + \frac{\pi^2}{8}h^2 + \frac{\pi^3}{24}h^3 + h^3\varepsilon(h). \\ \text{Ainsi,} \quad & \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right) &&= 1 + \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi^2}{8}(x-1)^2 + \frac{\pi^3}{24}(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Remarque. La formule de Taylor-Young permet de déterminer directement le développement limité en x_0. Ceci dit, il est souvent plus simple de *translater au voisinage de zéro* pour utiliser les DL connus donnés au voisinage de zéro.

Par exemple, déterminons le développement limité à l'ordre 2 en 2 de $\ln x$. On pose $x = 2 + h$ et

$$\begin{aligned} \ln x &= \ln(2+h) \\ &= \ln 2 + \ln(1+\frac{h}{2}) \\ &= \ln 2 + \frac{h}{2} - \frac{(\frac{h}{2})^2}{2} + h^2\epsilon(h) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + (x-2)^2\epsilon(x-2) \end{aligned}$$

Exercice : Déterminer le D.L. à l'ordre 3 de $x \mapsto \cos x$ en $\frac{\pi}{2}$ et de $x \mapsto e^x$ en 1.

Exercice : Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de la fonction

$$f : x \mapsto \cos(\frac{\pi x}{2}).$$

3.2 Formule de Taylor-Mac Laurin

La formule dite de Taylor-Mac Laurin est le cas particulier de celle de Taylor-Young pour $x_0 = 0$.

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)}$$

Ce qui fournit le développement limité à l'ordre n de f en zéro, que l'on appelle aussi **développement de Taylor-Mac Laurin** ou encore développement de Taylor-Young au voisinage de 0.

4 Développements limités usuels

4.1 Développements limités de référence

Tous les développements limités de cette section sont à connaître absolument.

Nous rappelons que

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)}$$

et

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)}$$

Nous allons obtenir les autres développements de référence par la formule de Taylor-Mac Laurin (3.2).

• La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même. Par récurrence sur l'ordre de dérivation on obtient que la fonction exponentielle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$ sa dérivée nième est elle-même. Puisque $e^0 = 1$, la formule de Taylor-Mac Laurin donne

$$\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)}$$

• La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée la fonction cosinus. cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sinus est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'' = -\sin$. $\sin''$ est donc 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin^{(4)} = \sin$. Par récurrence sur l'ordre de dérivation on obtient que sinus est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et les dérivées successives de sin sont cos, $-\sin$, $-\cos$, sin, cos, $-\sin$, ... On a donc $\sin^{(2n)} = (-1)^n \sin$ et $\sin^{(2n+1)} = (-1)^n \cos$ et donc $\sin^{(2n)} 0 = (-1)^n \sin 0 = 0$ et $\sin^{(2n+1)} 0 = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$. Le développement limité à l'ordre $2n$ est donc

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + x^{2n} \epsilon(x)}$$

Celui à l'ordre $2n + 1$ est

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)}$$

• La fonction cosinus est la dérivée de la fonction sinus donc est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ également. On a $\cos^{(2n+1)} 0 = \sin^{(2n+2)} 0 = 0$ et $\cos^{(2n)} 0 = \sin^{(2n+1)} 0 = (-1)^n$. Le développement limité à l'ordre $2n$ est donc

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \epsilon(x)}$$

Celui à l'ordre $2n + 1$ est

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)}$$

On peut aussi obtenir le développement de $\cos x$ par intégration du développement de $-\sin x$.

• Soit α un réel. On pose $f(x) = (1 + x)^\alpha$ pour $x > -1$. f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et sur cet intervalle $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. f' est donc dérivable sur $]-1, +\infty[$. Supposons que f soit n fois dérivable sur $]-1, +\infty[$ et que sur cet intervalle $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha - n}$. Alors $f^{(n)}$ est dérivable sur $]-1, +\infty[$. f est donc $n + 1$ fois dérivable sur $]-1, +\infty[$ et

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)(\alpha - n)(1 + x)^{\alpha - n - 1} \\ &= \alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - (n + 1) + 1)(1 + x)^{\alpha - (n+1)} \end{aligned}$$

f est donc indéfiniment dérivable sur $]-1,+\infty[$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$ $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$. On obtient donc

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)}$$

4.2 Développements limités des fonctions usuelles

Le but de cette section est de donner une méthode permettant d'obtenir les développements limités des autres fonctions usuelles à l'aide des développements limités de référence.

- $\text{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$
- $\text{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$

Remarquez que la partie principale du développement limité de ch$x$ (resp. sh$x$) est la partie paire (resp. impaire) de la partie principale du développement limité de e^x.

Le développement de $\tan x$ s'obtient par composition et produit de développements de référence. Par exemple le développement à l'ordre 5 est

$$\tan x = \sin x \, \frac{1}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x)$$

Puisque
$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$

on obtient facilement par substitution les trois suivants :

- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$
- $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x)$
- $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x)$

On en déduit les quatre suivants par intégration :

- $-\ln(1-x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)$
- $\text{Argth}x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x)$
- $\text{Arctan}x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x)$

A l'aide du développement

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$$

on obtient les développements suivants :

- $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \cdots + \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x)$
- $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n} x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x)$

puis finalement par intégration :

- $\text{Arcsin} x = x + \dfrac{x^3}{2.3} + \cdots + \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n.(2n+1)} x^{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x)$
- $\text{Argsh} x = x - \dfrac{x^3}{2.3} + \cdots + (-1)^n \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n.(2n+1)} x^{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x)$

5 Complément : Formule de Taylor-Lagrange

Il existe une autre formule de Taylor, appelée Taylor-Lagrange, ressemblant à la formule de Taylor-Young. Cependant son utilisation est un peu différente et permet d'obtenir des égalités parfois plus précises, le reste étant un peu plus explicite que dans la formule de Taylor-Young.

Proposition 5.0.1 (Formule de Taylor-Lagrange) – *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, x et x_0 deux éléments de I. Soit f une fonction définie sur I, de classe C^n sur I ayant une dérivée niéme dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités x et x_0, alors il existe un réel c strictement compris entre x et x_0 tel que :*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Définition 5.0.2 *La formule précédente est appelée le développement de Taylor-Lagrange de la fonction f, à l'ordre n, en x_0. La quantité $\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ est appelée* **reste** *du développement de Taylor.*

Idée de démonstration. Nous allons nous contenter ici de démontrer le cas n =2, le cas général se traitant de la même manière. On cherche donc à montrer l'existence d'un réel c strictement compris entre x et x_0 tel que :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-x_0)^3.$$

Pour tout t compris entre x et x_0 posons

$$d(t) = f(t) - [f(x_0) + f'(x_0)(t-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(t-x_0)^2 + \frac{K}{3!}(t-x_0)^3]$$

où K est le réel tel que d(x) = 0. Sur l'intervalle d'extrémités x et x_0, la fonction $d : t \mapsto d(t)$ est continue sur le fermé et dérivable sur l'ouvert et, $d(x) = d(x_0) = 0$. D'après le théorème de Rolle il existe donc un réel c_1 strictement compris entre x et x_0 tel que $d'(c_1) = 0$. On a

$$d'(t) = f'(t) - [f'(x_0) + f''(x_0)(t-x_0) + \frac{K}{2!}(t-x_0)^2]$$

Sur l'intervalle d'extrémités c_1 et x_0, la fonction dérivée de d, $d' : t \mapsto d'(t)$ est continue sur le fermé et dérivable sur l'ouvert et, $d'(c_1) = d'(x_0) = 0$. D'après le théorème de Rolle il existe un réel c_2 compris strictement entre c_1 et x_0 tel que $d"(c_2) = 0$. On a

$$d''(t) = f''(t) - [f''(x_0) + K(t - x_0)]$$

Sur l'intervalle d'extrémités c_2 et x_0, la dérivée seconde, $d'' : t \mapsto d''(t)$ est continue sur le fermé et dérivable sur l'ouvert et, $d''(c_2) = d''(x_0) = 0$. D'après le théorème de Rolle il existe un réel c compris strictement entre c_2 et x_0 tel que $d'''(c) = 0$ ce qui donne :

$$f'''(c) = K$$

et qui termine cette preuve. $\square$

Exemples d'application :

• Estimons la valeur de $\sin 1$.

Écrivons la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction sinus entre 0 et 1 pour $n = 4$: il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$\sin 1 = \sin 0 + (1 - 0)\sin'(0) + \frac{(1-0)^2}{2!}\sin''(0)+$$

$$+\frac{(1-0)^3}{3!}\sin^{(3)}(0) + \frac{(1-0)^4}{4!}\sin^{(4)}(0) + \frac{(1-0)^5}{5!}\sin^{(5)}(c)$$

c'est-à-dire

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{\cos c}{120}$$

On a donc $\sin 1 = \frac{5}{6} + \varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < \frac{1}{120} < 10^{-2}$, et $\frac{5}{6}$ est une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de $\sin 1$.

• Calculons la valeur du nombre e.

Écrivons la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction exponentielle entre 0 et 1:
Il existe $c \in]0, 1[$ tel que

$$e^1 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\exp^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1}$$

Le reste de Taylor est compris entre 0 et $\frac{e}{(n+1)!}$. Donc pour tout entier n, on a

$$0 \leq e - (1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}) \leq \frac{e}{(n+1)!}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on trouve

$$e = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

6 Exercices

6.1 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\sin x - x + x^7$.

6.2 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sin^2 x$ puis celui de $\cos^2 x$.

6.3 Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\operatorname{Arcsin} x$.

6.4 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\sqrt{1+x+x^2}$.

6.5 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\dfrac{1}{1+\cos x}$.

6.6 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\dfrac{e^x \sin x}{1+x^2}$

6.7 Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. En déduire les valeurs de $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$, $f^{(4)}(0)$, $f^{(5)}(0)$.

6.8 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\ln(2-\sin x)$.

6.9 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{\dfrac{x-4}{x-1}}$.

6.10 Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\arctan(1+x)$.

6.11 Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\tan x$.

6.12 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $\sqrt{x}e^x$.

6.13 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $\dfrac{x^x-1}{\ln x}$.

6.14 En utilisant des développements limités, déterminer les limites suivantes quand elles existent :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x - \sin x}$$

6.15 Calculer la limite en 0 de $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1-x)^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

6.16 Etudier suivant les valeurs de l'entier n la limite quand x tend vers 0 de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\tan\left(\ln(1+x)\right) - \ln(1+\tan x)}{x^n}.$$

6.17 (Prolongement par continuité) La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\left\{ \begin{array}{lcll} f(x) & = & \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = & 1 & \end{array} \right.$$

est continue sur $\mathbb{R}$. On dit que f est le prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme l'est la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x}$.
Montrer que f est également dérivable en 0.

6.18 On considère la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}\right).$$

Montrer que f est prolongeable en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

6.19 Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(\cos x + \sin x)$.
En déduire que la suite $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n} + \sin\dfrac{1}{n}\right)^n$ converge. Dire si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers cette limite par valeurs inférieures ou supérieures.

6.20 En utilisant des développements limités, étudier au voisinage de 0 la position relative des deux courbes d'équations :

$$y = \frac{1+x}{1-x} \qquad \text{et} \qquad y = e^{2x}.$$

6.21 Soit $f(x) = \dfrac{1+ax^2}{1+bx^2}$. Déterminer les constantes a et b de telle façon que l'on ait

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \cos x}{x^n} = 0$$

avec l'entier n le plus grand possible. Autrement dit, on cherche a et b afin que $f(x)$ approxime le mieux possible $\cos x$ au voisinage de 0.

6.22 Démontrer qu'il existe des réels a, b et c et une fonction $\epsilon : u \mapsto \epsilon(u)$ tendant vers 0 pour u tendant vers 0 tels que pour x voisin de $+\infty$:

$$xe^{\dfrac{1}{x-1}} = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{1}{x}\epsilon(\frac{c}{x}).$$